

三輪式無人載具低速時第三輪轉向匹配控制之研究

許健興¹ 陳姿樺¹ 陳澤民^{1,*}

摘要 本研究致力減少內輪轉動位移差並縮小旋轉半徑，以改善田間載具於低速轉向時對於轉向條件極度限縮的適應性。研究對象以三輪式無人載具為模型，並蒐集參考目前田間曳引機及國內汽車之相關尺寸，以建立數學模式並計算第三輪與前輪同步之旋轉中心，並輔以 PID 控制器驅動第三輪以配合前輪轉向。而針對載具之前兩輪所使用之四連桿雙搖臂連動機構，並應用福氏方程式計算求得最適搭配之四連桿機構尺寸。本研究結果顯示，將依據本研究所設計尺寸之三輪式無人載具第三輪配合前輪同步轉向控制之轉向系統與傳統轉向系統進行比較，旋轉半徑可減少 19% 至 29%，有效縮小轉向空間並可避免產生後輪過切現象。最後以 SolidWorks 軟體依前述資料建構模型，透過軟體機構動態模擬功能，確認模型能正常運作且與計算結果相符。

關鍵詞： PID 控制器、四連桿雙搖臂機構、福氏方程式、過切現象。

A Study of the Active Steering Control on the Driven Wheel of an Autonomous Three-Wheeler for Limited Turnings at Low Speeds

Chien-Hsing Hsu¹ Zi-Hua Chen¹ Tse-Min Chen^{1,*}

ABSTRACT Abstract To reduce toeing out and the radius of gyration of a front wheel drive vehicle maneuvering through tight corners at low speeds, this research evaluated the dimensions of traction machines and designed the prototype of an autonomous three-wheeler with a four-bar equal-crank linkage steering mechanism and an active controlled driven rear wheel for overturning avoidance. The model of the synchronous gyration center of the wheels was proposed. A PID controller was then installed on the rear driven wheel with which allowed the rear wheels to turn in the opposite direction when the front wheels are turning and results in a quicker and more efficient turning. The Freudenstein's equation was employed to determine the optimal dimensions for the four-bar linkage mechanism of the prototype, too. The final results indicate that the radius of gyration of a three-wheeler set up with the theoretical dimensions, was able to be reduced by 19% to 29% and the undercutting of the rear wheel could also be prevented. Established and simulated on SolidWorks, the proposed model was validated.

Key Words: PID Controller, Freudenstein's Equation, Four-Bar Equal-Crank Linkage, Undercutting.

前言

傳統車輛之轉向系統以阿克曼轉向機構 (Ackermann steering geometry) 為主。轉彎時四輪之旋轉中心交於後輪軸線上，該設計尺寸決定了旋轉半徑之大小，適用於普遍道路之行駛。然而在極度限縮之

環境，如田間載具行車於田間頭地或狹窄之十字路口擬進行轉向時，因受限於車體尺寸及其最小旋轉半徑，傳統之前輪轉向方式將無法全面適用^[1]。

而現今四輪轉向系統已可改善前述情況，其操控方式與功能為：行車低速轉彎時，控制前輪與後輪轉向相反，減少內輪轉動位移差，使旋轉半徑變小易於轉向；

¹ 國立中興大學生物產業機電工程學系。

Dept. of Bio-industrial Mechatronics Engineering, National Chung Hsing University, Taichung 40227 Taiwan, R.O.C.

* Corresponding author, email: tmchen@nchu.edu.tw

高速轉彎時控制前後輪轉向相同使後輪不易偏轉打滑，惟四輪轉向機構之控制系統較前輪轉向系統更為複雜且成本高^[2,3]。

本研究提出另一種控制前、後輪同步轉向之方式，目的為提升田間自走載台轉向性能，期待能應用至田間機具，如聯合收穫機具等，以適應極度限縮之行走環境。在設計理論方面，模擬以三輪低速行走之田間無人載具為例，將三輪之旋轉中心位置規劃控制於前 / 後輪軸線間，以獲取比傳統前輪轉向之三輪式自走車更小之旋轉半徑，進一步改善無人載具之轉向能力。在實務應用方面，研究結果除可做為田間載具作業之參考，若對同樣為三輪設計之沙灘車及越野摩托車為模型導入反向控制，以獨立輪轉向同步控制後兩輪轉向，亦可大幅改善轉向性能，增進操控之靈活性與行車之安全性。

三輪轉向數學模式與控制模式之建構

三輪轉向基本模型之數學模式

福氏方程式 (Freudenstein's equation) (式 2) 為推導四連桿機構合成矩陣方程式方法之一 (圖 1)，可由已知輸入角 θ 與輸出角 φ 求得四連桿機構中四個連桿之相對應最適尺寸^[4,6]。

由圖 1 使用距離公式，即連桿長度平方等於座標差之平方值，可得：

$$b_3^2 = (b_1 + b_4 \times \cos \varphi - b_2 \times \cos \theta)^2 + (b_4 \times \sin \varphi - b_2 \times \sin \theta)^2 \dots \dots (1)$$

展開並簡化後即可得福氏方程式(式 2)^[9,10]：

$$K_1 + K_2 \times \cos \varphi - K_3 \times \cos \theta = \cos \delta \dots \dots \dots (2)$$

其中：

θ = 輸入搖桿 b_2 的水平夾角即輸入角 (為已知數)。

φ = 輸入搖桿 b_4 的水平夾角即輸出角 (為已知數)。

$\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ = 桿長度矩陣。

A = (0,0) · 原點

D = (b₁,0)

B = (b₂ × cos θ, b₂ × sin θ)

C = (b₁ + b₄ × cos φ, b₄ × sin φ)

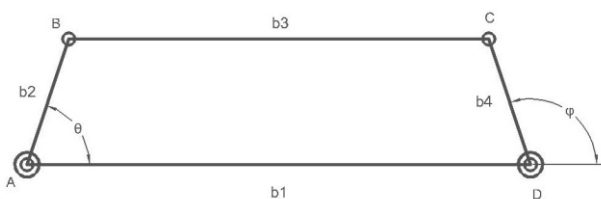


圖 1 四連桿機構
Fig. 1 four bar linkage mechanism

$$\delta = \theta - \varphi$$

$$K_1 = \frac{b_1}{b_4}$$

$$K_2 = \frac{b_1}{b_2}$$

$$K_3 = \frac{b_3^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_4^2}{2b_2b_4}$$

圖 2 則為三輪式無人載具三輪轉向模型，前二輪以四連桿雙曲柄機構，前輪轉向角度為 α 、 γ ，第三輪以馬達控制配合前輪轉向，第三輪轉向角度為 β ，其旋轉中心落於 O_1 、 O_2 、 O_3 之 3 點連線上。其中 $\overline{OO_1}$ 、 $\overline{BO_2}$ 、 $\overline{AO_3}$ 線段為轉彎時三輪之旋轉半徑^[7,8]。另由圖可知傳統僅前輪轉向之無人載具旋轉中心位於後軸軸線上 O_1' 點至 A 點連線上。

其中：

r ：以三輪式無人載具之三輪旋轉半徑

R ：僅前輪轉向之旋轉半徑

W ：前輪左右輪之中心距離

D ：前 / 後輪軸之中心距離

C ：三輪式無人載具三輪旋轉中心與前輪軸之距離

ψ ：前輪左 / 右轉向之最大轉向角度範圍

α 、 γ ：前左 / 右輪之轉角

β ：後輪 (第三輪) 之對應轉角

若以 O 為原點，可推導得旋轉半徑如下：

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{D - C}{\frac{W}{2} + \tan \alpha} \right) \dots \dots \dots (3)$$

$$r = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right) \times C^2 + \frac{2W}{\tan \alpha} \times C + W^2} \dots \dots \dots (4)$$

方程式(4)中，令 $\alpha=45^\circ$ 並對變數 C 微分求 r 極值。

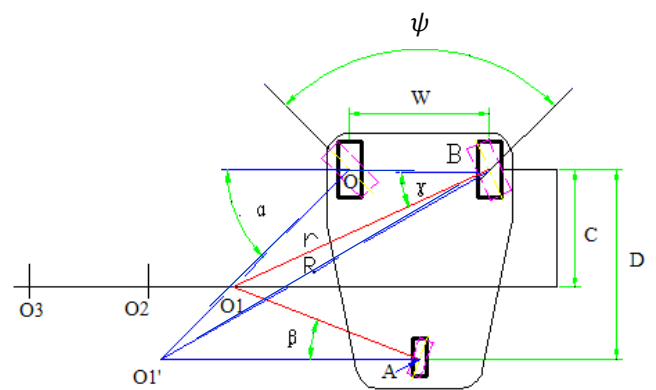


圖 2 三輪式無人載具三輪轉向模型
Fig. 2 steering model of the autonomous three-wheeler

得 $C = -W/2$ 時， r 有最小值^[10]。若 C 為負值時，旋轉中心將位移於前輪軸之前，無法求出 r 之最小值，由圖 1 亦可觀察出。此時需另設模型尺寸，模擬比較 C 與 r/R 之關係。而當 $C=D$ 時

$$R = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right) \times D^2 + \frac{2W}{\tan \alpha} \times D + W^2} \dots \dots \dots (5)$$

三輪轉向模型尺寸選用

參考目前國內銷售之汽車與農用曳引機規格尺寸，分析得知各廠牌汽車之前後輪軸距 / 左右輪中心距比值約為 1.5~1.8，各廠牌農用曳引機之前後輪軸距 / 左右輪中心距比值約為 1.2~1.5，因此本實驗以圖 2 三輪式無人載具三輪轉向模型，將前後輪軸距離 / 左右輪中心距離分別設定為 1.2、1.5 及 1.8 之三種比值，規劃設定各項參數尺寸，最後選用表 1 之尺寸進行模擬比較分析。

前後輪整合轉向 PID 控制模式

本研究期許藉由速度偵測及前輪左右兩側安裝轉動角檢測器，載具速度小於 25 km/h 時，將偵測前輪左 / 右轉向角度 α ，經「類比 / 數位」轉換傳輸至個人電腦，經電腦運算出後輪對應角度 β ，控制信號角度 β 傳送到 PID 控制補償器運算輸出驅動後輪轉向馬達，由後輪轉角檢測器測得實際後輪轉動角度，回饋轉角訊號進行比較控制，再傳送 PID 控制器重覆運算至後輪轉動角度 $\beta' = \beta$ ，圖 3 為三輪式無人載具轉向控制流程圖^[5,12]。

本研究轉向限制控制條件為：暫態響應最大超越量 $M_o=25.4\%$ 以及後輪於 3 秒內達到穩定轉角 (即安定時間 $t_p=3sec$)。利用標準二階系統模式之閉迴路轉移函數式(6)、式(7)以及式(8)。(其中 ξ 為系統阻尼)

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \dots \dots \dots (6)$$

$$M_o = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \dots \dots \dots (7)$$

$$t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} \dots \dots \dots (8)$$

可解得：

馬達的時間常數 $\tau_m=1.09$

表 1 三輪式無人載具模擬尺寸

Table 1 dimensions of the autonomous three-wheeler for simulations

(單位：mm)

項次	D	W	C	α	b_1	備註
1	1745	1200	1000~1300	0~50	950	參考曳引機
2	2200	1360	1600~1900	0~50	1060	參考曳引機
3	2700	1475	1700~2000	0~45	1200	參考汽車

馬達增益常數 $K_m=1.424$

將可做為電樞控制直馬達設計規格選用之參考。

實驗設備、材料與方法

本研究係以圖 2 之三輪式無人載具三輪轉向模型，規劃第三輪之旋轉中心位置落於前 / 後輪軸線間，前輪以傳統四連桿雙搖桿機構轉向，第三輪以伺服馬達控制配合前輪轉向，另前輪以四連桿機構為轉向系統，第三輪配合左 / 右前輪控制達成最小旋轉半徑。

實驗設備

一、個人電腦：

FX-4100 高速 3.6GHz 超頻四核 CPU、華碩 M5A78L-M_LX_PLUS 主機板、DDR3-4G 記憶體。

二、模擬分析軟體：

Excel、MATLAB 及 SolidWorks。

實驗方法：

針對三輪式無人載具之左輪與右輪之距離、前後輪軸距及旋轉中心等相關參數 (b_1 、 C 、 D 、 W 、 θ) 及變數 α 之尺寸，求出對應之 β 、 γ 、 R 、 r 尺寸，與傳統轉向之三輪式載具進行轉向各項參數分析及旋轉半徑比較。

模擬步驟：

將表 1 三輪式無人載具模擬尺寸代入式 3 及式 4 中，求得 r (三輪式無人載具之三輪旋轉半徑) 以及 R (傳統旋轉半徑) 之尺寸，利用 Excel 軟體與傳統三輪式無人載具進行煞車轉向之各項參數分析比較。另依據式 3 中 α 角與 β 角之關係及圖 3，導入 PID 控制模式，求得控制器之比例、積分、微分參數 K_p 、 K_i 、 K_d ，以做為實際模型調整之起始值 (Initial values)。

驗證方式

使用表 1 三輪式無人載具之車身及 b_1 尺寸，代入式 3 及式 4 中，求出圖 2 中 O_1 與 O_2 之位置座標，並以前 3 點中心座標換算出圖中四連桿之輸入角 (θ)、輪

出角 (φ) 及 δ ，應用 MATLAB 軟體計算求出最適之四連桿雙曲柄機構中其他連桿 b_2 、 b_3 、 b_4 之尺寸，再以 SolidWorks 建模軟體進行動態驗證。

結果與討論

三輪式無人載具第三輪轉向匹配控制與傳統三輪轉向控制轉向半徑之比較

以圖 1 為模型：選取 $D=1745\text{mm}$ 、 $W=1200$ 、 $C=1000\sim 1300$ 且 $\alpha=50^\circ$ 、 35° 、 25° ，得三輪式無人載具三輪旋轉中心與前輪軸之距離 C 與 r/R (以三輪式無人載具之三輪旋轉半徑 / 僅由前輪轉向之旋轉半徑) 比值之關係如圖 4。

以圖 1 為模型：選取 $D=2200\text{mm}$ 、 $W=1360$ 、 $C=1600\sim 1900$ 且 $\alpha=50^\circ$ 、 35° 、 25° ，代入方程式(2)及(3)中，得 C 與 r/R 比值之關係如圖 5。

以圖 1 為模型：選取 $D=2700\text{mm}$ 、 $W=1470$ 、 $C=1700\sim 2000$ 且 $\alpha=45^\circ$ 、 35° 、 25° ，代入方程式 2.2 及 2.3 中，得 C 與 r/R 比值之關係如圖 6。

由圖觀察 r/R 比值與 C 值呈現線性 (Linear) 關係比(由方程式化簡後亦為二元一次方程式)，且當旋轉角 α 值越大時， r/R 與 C 對應斜率越大，相對表示當旋轉中心距離前輪中心越近時，第三輪配合前輪轉向較傳統轉向控制之旋轉半徑將可減少較多，依所得尺寸計算將可減少 19~29%。

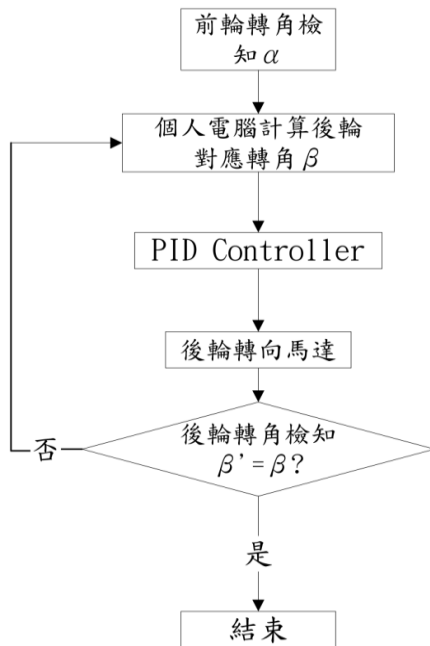


圖 3 第三轉向輪匹配控制之流程圖
Fig.3 flowchart of the steering control on the driven wheel

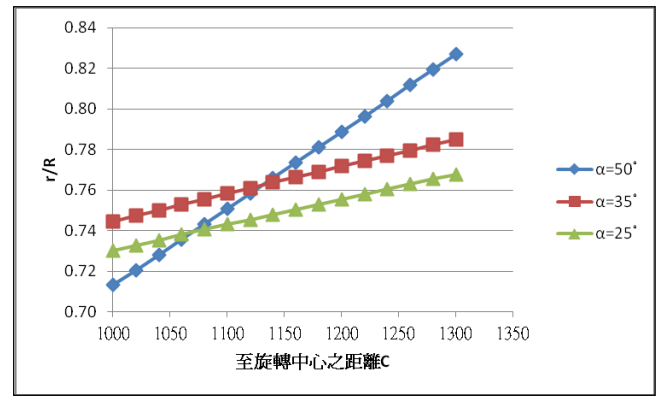


圖 4 C 與 r/R 比值之關係圖 (模擬尺寸 $D=1745\text{mm}$ 、 $W=1200$ 、 $C=1000\sim 1300$ 且 $\alpha=50^\circ$ 、 35° 、 25°)
Fig.4 relationship between C and r/R for dimension $D=1745\text{mm}$, $W=1200$, $C=1000\sim 1300$ and $\alpha=50^\circ$, 35° , 25°

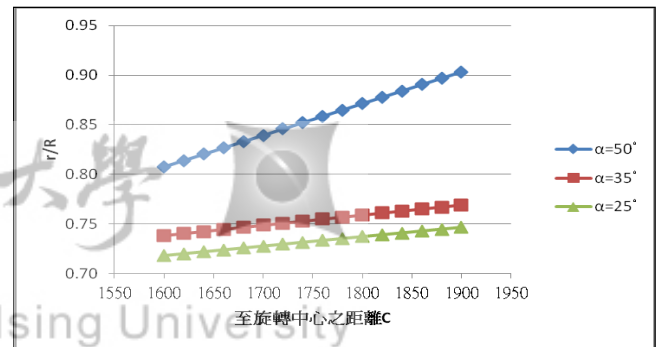


圖 5 C 與 r/R 比值之關係圖 (模擬尺寸 $D=2200\text{mm}$ 、 $W=1360$ 、 $C=1600\sim 1900$ 且 $\alpha=50^\circ$ 、 35° 、 25°)
Fig.5 relationship between C and r/R for dimension $D=2200\text{mm}$, $W=1360$, $C=1600\sim 1900$ and $\alpha=50^\circ$, 35° , 25°

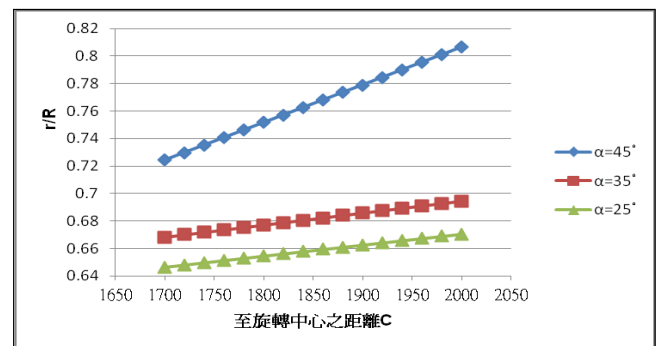


圖 6 C 與 r/R 比值之關係圖 (模擬尺寸 $D=2200\text{mm}$ 、 $W=1360$ 、 $C=1600\sim 1900$ 且 $\alpha=50^\circ$ 、 35° 、 25°)
Fig.6 relationship between C and r/R for dimension $D=2200\text{mm}$, $W=1360$, $C=1600\sim 1900$ and $\alpha=50^\circ$, 35° , 25°

三輪式無人載具之左 / 右轉結果討論

如圖 7 比較三輪式無人載具第三輪匹配控制 (Path 2 : P2) 與傳統轉向控制 (Path 1 : P1) 之內側車輪轉向軌跡有明顯差異。

由圖 8 比較三輪式無人載具第三輪匹配控制 (Path 2) 與傳統轉向控制 (Path 1) 之外側車輪煞車轉向軌跡，於轉向後旋轉 30°內約呈現交叉重疊，無明顯變化，約過 30°後方有較大差異。

由圖 9 比較三輪式無人載具第三輪匹配控制 (Path 2) 與傳統轉向控制 (Path 1) 之第三輪煞車轉向軌跡，於轉向軌跡有明顯不同，前者呈現與轉向方向相反之趨勢，有助於避免後輪產生過切現象 (Undercutting)。

綜合前述，由圖 10 可觀察到在第三輪轉向受控制下，因旋轉半徑小，於同轉向角度時其所需轉向空間較小，且在第三輪輔助轉向情況下，可避免後輪產生過切，減少與內側障礙物產生干涉現象。

以 SolidWorks 建模驗證旋轉中心相符性

選取 $D=2700\text{mm}$ 、 $W=1475$ 、 $C=1850$ ，並利用福氏方程式與 SolidWorks 建模組件，建構三輪式無人載具之前輪轉向模組如圖 11，換算模擬旋轉中心位置尺寸與原幾何尺寸誤差值小於 1%，且模擬結果無干涉現象產生，顯示數學模式計算與軟體模擬均可獲得接近之結果，亦表示三輪式無人載具之三輪以一共同旋轉中心進行轉向運動，而此結果可與前述結果互相印證。

結論與建議

本研究結果顯示，若三輪式無人載具之第三輪匹配

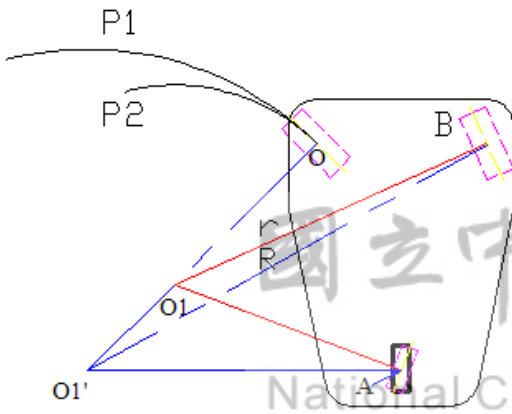


圖 7 左 / 右轉向時-內側車輪軌跡比較圖
Fig. 7 trajectories of the inner side driving wheel when turning right or left

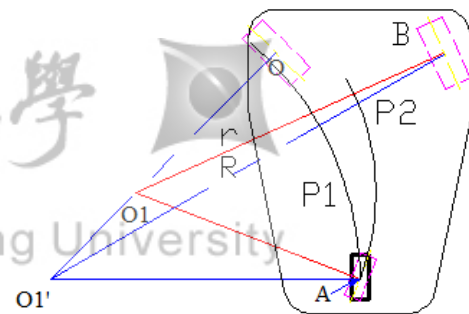


圖 9 左 / 右轉向時-第三輪軌跡比較圖
Fig. 9 trajectory of the driven wheel when turning right or left

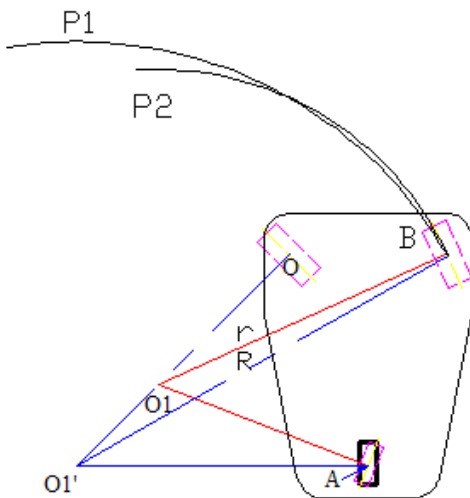


圖 8 左 / 右轉向時-外側車輪煞車軌跡比較圖
Fig. 8 braking trajectories of the outer side driving wheel when turning right or left.

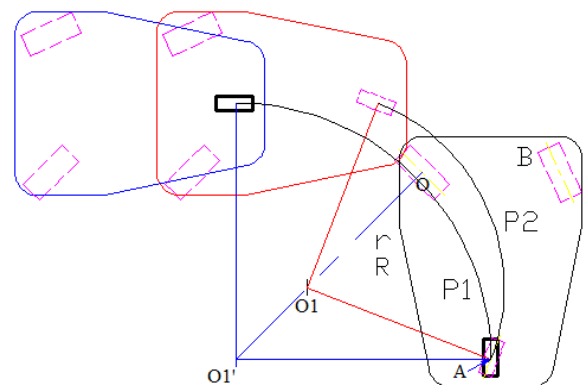


圖 10 左 / 右轉向時-車身軌跡比較圖
Fig. 10 trajectories of the chassis when turning right or left

前輪施予轉向控制，與傳統前輪轉向系統相較，將可獲得較小之最小旋轉半徑，前者最小旋轉半徑約為後者之 0.71~0.81 倍(減少 19~29%)，因此縮小轉向所需要之空間及避免產生後輪過切現象，相對提升轉向操控性，可適應於田間頭地及狹窄之小路或巷道。本研究著重在幾何模型推導，並藉由軟體驗證機構之可行性，未來研究建議以 PID 控制器配合實體三輪式無人載具，連接附掛農用作業機具作為後續實踐課題。另若反置本研究模型，改用獨立輪轉向以操控後兩輪轉向(如三輪之沙灘車及越野摩托車等)並施與反向控制，則依本研究結論推估，亦將有縮小旋轉半徑之效果，應可解決後輪之左右差速問題，並改善轉向性能及行車安全性，可做為目前沙灘車及越野摩托車後輪轉向設計之參考。

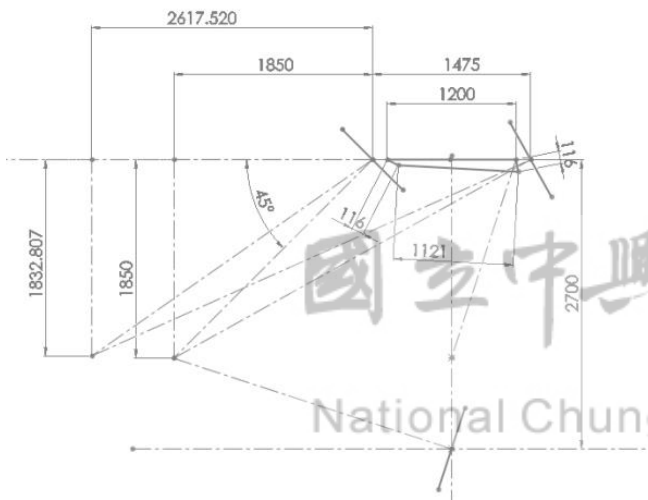


圖 11 SolidWorks 模擬三輪式無人載具轉向中心
Fig. 11 the turning node of the three-wheeler simulating by SolidWorks

參考文獻

- [1] 徐正會、何晉欽(1993)，車輛轉向機構之回顧與分析，國科會計畫報告，編號 NSC-89-2218-E-027-005。
- [2] 劉崇富譯(2011)，汽車學(二)：汽車驅動系統與底盤，台北：美商麥格羅·希爾國際股份有限公司(臺灣)。
- [3] 汪國禎(2010)，汽車學(II) [底盤篇]，台南：復文圖書有限公司。
- [4] 張慶堂(2001)，機構分析，台北：五南圖書出版有限公司。
- [5] 張碩(2001)，自動控制系統，台北：鼎茂圖書出版有限公司。
- [6] 劉裕方(2005)，應用 PID 理論於曲柄滑塊定位控制實作探討，高雄：義守大學電機工程學系碩士論文。
- [7] 徐正會、洪若桐(2005)，電動代步車四輪轉向系統之機構設計，第八屆全國機構與機器設計學術研討會：pp.2-6。
- [8] 游志德(1995)，四輪車輛轉向機構之合成，台北：國立台灣工業技術學院機械工程技術研究所碩士論文。
- [9] Freudenstein, F. and Kiss, I. (1969). "Type Determination of Skew Four-Bar Mechanisms," *Transaction of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp. 220-224.
- [10] Freudenstein, F. and Primrose, E. (1976). "On the Criteria for the Rotatability of the Cranks of Skew Four-Bar Linkage," *Transaction of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp. 1285-1288.
- [11] P. V. O'Neil, (2012). *Advanced Engineering Mathematics*, 7th ed, Cengage Engineering, Stamford, USA.
- [12] O'Dwyer, Aidan. (2006). *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*, World Scientific Pub Co Inc.

2015 年 04 月 21 日 收稿
2015 年 05 月 15 日 修正
2015 年 05 月 20 日 接受