

# 母數預備模式及母數回復模式在研究台灣林木生長及林分結構分析上之應用

楊榮啓\* 馮豐隆\*\*

《提要》本研究為將母數預測模式及母數回復模式，試用到林相變更計畫之柳杉人工林的林木生長及林分結構分析上，並且從理論及方法上探討其推廣應用的可行性。母數預測模式為直接預測直徑分佈函數之母數的未來值，再利用此一直徑分佈母數推算林分性態值。母數回復模式為直接預測林分性態值的未來值，再推算其直徑分佈亦即結合全林分生長模式與直徑分佈生長模式的方法。研究的結果可以提供台灣的森林學今後研究森林生長、林木育種及林業經營問題的參考。

《關鍵詞》生長模式、森林生物統計學、直徑分佈。中華林學季刊 22(1):53-71 (1999)

## *The Application of Parameter Prediction Models and Parameter Recovery Models to the Analysis of Tree Growth and Stand Structure in Taiwan.*

Yong-Chi Yang \* Fong-Long Feng \*\*

《Abstract》A technique for the analysis of tree growth and stand structure is introduced. Stand structures are analyzed by integrating a system of differential equations which relate rates of change in per hectare value of stand characteristics. Based on this concept, parameter prediction models (PPM) and parameter recovery models (PRM) are proposed. Parameter prediction models are those which directly predict the future values of the parameters of a probability density function characterizing a diameter distribution. Stand characteristics are then estimated using the diameter distribution. Parameter recovery models are those in which the stand characteristics are directly predicted and then used to obtain estimates of the underlying diameter distribution.

The purpose of this study is to test the applicability of the PPM and PRM to man-made forest trees of Taiwan. Growth data were obtained from CFI plots in *Cryptomeria* plantations of Stand Conversion Project in Taiwan. Linear and nonlinear least squares techniques were used in the determination of parameter estimates for these two models. The results of this study provide yield forecasting technique with the concepts of mathematical compatibility. Stand-average models and diameter distribution models were integrated together. The basis for extending the application of the yield forecasting techniques in Taiwan is also examined.

《Keywords》growth modeling, forest biometry, diameter distribution. Quarterly Journal of Chinese Forestry 22(1):53-71 (1999).

### I、緒言

---

\* 國立台灣大學森林系，台北市。Dept. of For. National Taiwan Univ., Taipei, ROC.

\*\* 國立中興大學森林系，台中市。Dept. of Forestry, College of Agri, National Chung-Hsing Univ. Taichung, Taiwan, ROC.

近年應用生長模式探討林木生長行為頗為流行，可以用做收穫預測(Clutter et al., 1983)，林木育種(孔，1987)、森林生態(Shugart et al., 1980)研究之基礎，從林學刊物上所見到的這種論文或報告的數量增加可見一斑。究其原因為環保意識的興起，林產物需求增加，專供生產木材的森林漸趨減少，所以促使森林資源有更集約經營的必要，而集約經營必須依靠對未來事物能夠做準確的預測，而生長收穫卻是林木集約經營最基本的資訊。因此，使用可以信賴的收穫預測資料，經營者才可配合現代進步的經營科技如決策理論、最適理論及模擬等做出完善的決策<sup>1</sup>，造成及培育出健康的森林，向人類提供更好的功能。

生長模式大體可以分成三類：

(1)林分平均收穫模式(又稱全林分模式)(Whole stand average model)，從林分有關資訊直接求得林分平均生長收穫。

(2)直徑分佈模式(Diameter distribution model)，從林分結構探討林分生長收穫。

(3)單株生長模式(Individual tree model)，將林分生長當做單株生長的集合。

Mackinney, Shumacher and Chaiken (1937)是早期使用數學式去預收穫的森林學家。在發展初期，生長與收穫的數學關係並未被詳細的確認，皆是分別做計算推測工作。Clutter (1963)在全林分的生長與收穫模式中，提出生長與收穫具有相容性(compatibility)的理論。從此以後，收穫模式對時間做微分即成為生長模式，尤其是同齡林的生長與收穫模式，是以林齡做為主要獨立變數而建立的。

全林分模式係僅考慮全林分的生長與收穫，無法提供樹木大小分佈的詳細資料。Clutter and Bennett (1965)首先提出利用機率密度函數(Probability density function, pdf)來描述直徑分佈，並以 pdf 的母數為林分性態值的函數，來解決樹木大小分佈的問題。本法提出之後，使經營者除能掌握現在及未來林分所能提供的總材積量之外，更可了解每單位面積各材種如紙漿材、桿材或製材級林木的生長量及收穫量，以達成多種材種最佳組合之計畫，並可利用本法容易決定不同林齡、地位、密度的收穫成本。本法又可稱做直徑分佈法(Diameter distribution method)。

推算或預測每單位面積株數( $N_t$ )及描述直徑分佈機率密度函數之母數( $\theta_t$ )的未來值，可以說是使用直徑分佈法探討森林收穫預測的核心；Hyink (1980)將這種推算方法分成兩類：(1)直接預測未來林分性態值的"母數預測模式(Parameter Prediction Model, PPM)；(2)使用平均林分性態值求出直徑生長及直徑分佈的母數回復模式(Parameter Recovery Model, PRM)。

本研究利用臺灣林相變更柳杉人工林永久樣區生長資料，將母數預測模式及母數回復模式試用到林木生長收穫及林分結構分析上，並且探討這類模式推廣應用的可能性。

## II、前人研究

### (一)全林分模式：

林的收穫量是用全林分收穫表徵，Mckinney et al. (1937)及 Schumacher (1939)，提出林分收穫為林齡倒數的函數，且最先加入林分密度因子來測測收穫，凡此皆屬於全林分模式，其一般的模式如下所示。

$$\ln(V) = b_0 + b_1 A^{-1} + b_2 f(s) + b_3 g(D_s)$$

V : 每公頃收穫量

A : 林齡

f(s) : 地位函數

g(Ds) : 林分密度函數

其後，有多篇論文引用上式推算現有材積，如 Bennett et al (1959)等。Clutter (1963)提出生長與收穫的相容性理論，即連年生長(簡稱生長)式，是總生長(簡稱收穫)式的微分式，總生長式是連年生長式的積分式。從此以後的研究皆顧及到生長與收穫的相容性。

許森淵等(1989)利用上述公式預測林分收穫，在全林分模式中，林分材積或重量由林分因子(如林齡、地位、每公頃斷面積或每公頃株數等)來預測，至於各大小級等的材積、重量及分佈的資訊則無法獲得。這一問題在直徑分佈模式發表之後而獲得解決。

## (二)直徑分佈法：

直徑分佈法一般以連續機率密度數來表示各直徑相對頻度的直徑分佈，藉以求得各直徑級每公頃的株數。再由各直徑級的平均樹高、平均材積算出各直徑級的材積，每公頃的材積則由直徑級累積而得。Delicour 在 1898 年即已發展描述直徑分佈的數學模式，但實際將機率密度函數用於直徑分佈法來處理林分結構及收穫預測問題的則是 Clutter and Bennett (1965)，其所使用的函數為  $\beta$  函數，後來  $\gamma$  分佈、對數常態分佈、指數分佈等分佈亦有人使用。然而 Weibull 函數則由 Bailey and Dell (1973)引用，由於其具有(1)各直徑級的機率容易求得，(2)各母數皆能代表幾何意義，(3)累積分佈函數易於求解，(4)曲線配合同齡林、異齡林的直徑分佈效果皆甚良好等優點，所以廣為使用。如楊及林(1978)、Feduccia et al. (1979)、Hyink (1979, 1980)、Cao et al. (1982)、羅及馮(1985)以及 Moser (1988)等皆曾使用 Weibull 函數研究林木分佈及林生長。

收穫林木的直徑分佈對於不同材種的整合經營是相當重要的一環，如林產物價格、收穫成本的決定，以及生產組合與經營計畫的編製等。

Weibull 機率密度函數(pdf)大體可分為兩種形式，即二個母數式及三個母數式，分述如下：

二個母數式

$$f(x) = (c/b)(x/b)^{c-1} \exp[-(x/b)^c]$$

$$\infty > x \geq 0$$

$$b > 0$$

$$c > 0$$

三個母數式

$$f(x) = (c/b)[(x-a)/b]^{c-1} \exp\{[-(x-a)/b]^c\}$$

$$\infty > x \geq a$$

$$b > 0$$

$$c > 0$$

函數中的母數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  在幾何意義上，分別代表位置、大小和形狀。

Smalley and Bailey (1974)則使用 Weibull 函數，及某一級的累積分佈函數( $P(L < x < U)$ )，求得短葉松人工林林木各直徑級的株數分佈。Strub and Burkhart (1975)提出級間自由設定(class-interval-free)之方法，由各直徑級推算每單位面積之林分收穫，其數式如下：

$$TV = N \int_L^U g(D)f(D)dD$$

TV：預測每單位面積的林分材積

N：每單位面積的株數

U, L：商用林林木直徑級的上下限

g(d)：單株材積式和／或樹高曲線式

f(d)：描述胸高直徑分佈之機率密度函數

### (三)單株生長模式法：

以各個單株為基本單位來預測林木生長收穫的方法，此法廣泛的應用於美國西部、濱湖洲及加拿大。

單株生長模式係模擬各單木之樹冠、直徑、樹高的生長，以樹木大小與競爭(與鄰近林木的距離)來決定該林木是否存活，然後再由基因及局部地位因子的隨機組成來決定林木的生長速率，而每一公頃的收穫量由各單株材積累積，並乘上適當的擴展因子，更由各單株的平均得到林分生長速率；單株生長模式提供模擬各單株競爭環境之詳細的林分動態及結構，這當然包括了各直徑級林分材積分佈的資訊。

單株生長模式可依林木間的競爭狀態而分成兩類：

(1)與距離無關的模式：各株生長各自建立模式且由各株的直徑、樹高及林分斷面積、平均直徑等因子，來決定所欲調查之單株林木的競爭狀態。此一模式假定所有林木皆很均勻的分佈在整個林分。其競爭指標以所欲調查林木大小與全部林木大小相比較；若此一林木之樹冠、樹高、直徑較林分平均值小時，一般表示缺少競爭活力。Stage (1973)曾經使用斷面積表示競爭程度，Wensel and Danghety (1984)曾經使用樹冠面積表示競爭程度。

(2)與距離有關的模式：除了所欲調查之單株林木自身的樹高、直徑外，更要考慮與所要調查林木能夠發生陽光、水分、養分競爭之鄰近林木的距離。在 1951 年，Staebler 曾經提出圓形影響範圍(Circular zone of influence)的觀念，由於在所欲調查林木周圍有競爭林木存在，致使其生長減低，其所使用的競爭指數( $C_i$ )計算公式為：

$$CI_j = \sum_{i=1}^n \left( \frac{d_{ij} CR_j}{2} \right)$$

$C_i$ ：第  $j$  株林木的競爭指標；

$d_{ij}$  : 與第  $j$  株林木競爭的第  $i$  株林木之重疊樹冠距離 ;  
 $CR_j$  : 第  $j$  株林木的樹冠 ;  
 $n$  : 競爭林木株數

Bella (1971) 利用重疊的樹冠面積比例與直徑比例算出競爭指數如下 :

$$CI_j = \sum_{i=1}^n \left( \frac{O_{ij}}{A_j} \frac{D_i^k}{D_j} \right)$$

$O_{ij}$  : 第  $i$  與第  $j$  株林木樹冠重疊的面積 ;  
 $A_j$  : 所欲調查林木  $j$  的樹冠面積 ;  
 $D_i, D_j$  : 第  $i$  與第  $j$  株林木的樹冠直徑 ;  
 $k$  : 係數

Hegy (1974) 利用係數為 10 的斷面積稜鏡, 求得對所欲調查林木  $j$  及具有競爭的林木  $i$  (合計共有  $n$  株), 再以下列公式算出競爭指數 :

$$CI_j = \sum_{i=1}^n \left( \frac{D_i}{D_j} \frac{1}{L_{ij}} \right)$$

$D_i, D_j$  : 所欲調查之林木  $j$  與其競爭林木  $i$  的樹冠直徑 ;  
 $L_{ij}$  : 第  $j$  株與第  $i$  株的距離

Daniels and Burkhardt (1975) 所發表的 PTAEDA, 即為利用與距離有關的單株生長模式, 其競爭指數(CI)如下所示 :

$$CI = \sum_{j=1}^n \left( \frac{DBH_j / DBH_i}{DIST_{ij}} \right)$$

$DBH_i, DBH_j$  : 所欲調查林木  $j$  與其競爭林木  $i$  的胸高直徑 ;  
 $DIST_{ij}$  : 第  $i$  與第  $i$  株間的距離

### III、理論基礎

在直徑分佈法中, 生長與收穫的推算及預測, 必須透過單位面積之林木株數( $Nt$ )及機率密度函數的母數( $\theta t$ )來完成。

從應用觀點來看, 推算  $Nt$  及  $\theta t$  的未來值可分成兩種 : (1) 直接預測描述直徑分佈機率密度函數中  $Nt$  及  $\theta t$  未來值的母數預測模式, (2) 先預測未來平均林分性態值, 再由此推算直徑分佈, 以求得  $Nt$  及  $\theta t$  值的母數回復模式。

現在, 將母數預測模式、母數回復模式以及與此二模式有關之直徑分佈法的理論基礎分述如下 :

#### (一) 直徑分佈模式

本法利用有效描述胸高直徑分佈之機率密度函數的母數, 配合樹高曲線式及材積式, 以

算出各直徑階材積的分佈，進而累計得出單位面積之材積及總材積或斷面積。其所使用的數學模式如下：

$$Y_{ij} = Nt \int_{D_{lj}}^{D_{uj}} g_i(x) f(x, \theta_t) dx \dots\dots\dots(1)$$

$Y_{ij}$ ：單位面積之  $D_i$  直徑級的材積或斷面積；

$Nt$ ：在  $t$  時單位面積之林木株數；

$D_{uj}$ ：第  $j$  直徑級的上限； $u = i - \varepsilon / \lambda$  ( $\varepsilon$ ：級距)

$D_{lj}$ ：第  $j$  直徑級的下限； $l = i + \varepsilon / \lambda$

$x$ ：胸高直徑；

$g_i(x)$ ：胸高直徑的可能函數如樹高曲線函數及或材積曲線函數；

$f(x, \theta_t)$ ：描述  $x$  時之直徑分佈的機率密度函數；

$\theta_t$ ：描述  $t$  時之直徑分佈的機率密度函數的母數向量，若是 Weibull 函數，則為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ；

$dx$ ：直徑級的區間。

本模式的假定條件如下：

1、所欲調查的林分直徑分佈能由一單峰機率密度函數適當的描述。此一假定條件僅能適用於同齡林，但是異齡林由於是由不同樹種或不同年齡所組成，因而呈現多峰現象，所以不能適用。

2、模式中的母數推算值皆是由永久樣區資料得來，所以每單位時間的改變皆可以測得。

3、生長速率函數由下列一或數項組合來定義：

(1)母數推算的林分性態值；

(2)與時間無關的常數(如地位、樹高曲線式、材積式等)；

(3)經過的時間(混淆林分受到干擾如伐木或火災後所經過的時間)。

4、可以測計及不可測計的條件，在未來預測及過去重測間皆沒有差異。

(二)母數預測模式：

母數預測模式是根據兩種生長收穫觀念為基礎所導出：(1) Clutter (1963)的相容性理論，即收穫函數為連續生長速率函數的積分，而生長速率函數為收穫函數以時間  $t$  的第一階微分式。(2) Moser (1972)及 Moser and Hall (1969)的收穫函數：

$$Y = \int_{A_0}^{A_0+h} f(A) dA = F(A)$$

係由微分式

$$dY/dA = f(A) \text{ 而得出，}$$

所以

$$Y = \int_{A_0}^{A_0+h} dY/dA \cdot dA = \int_{A_0}^{A_0+h} dY$$

$$Y_h = c + G(t)$$

c : t<sub>0</sub>時的 Y 值

$$G(t) : t_0 - t_h \text{ 時的生長量} : \int dY/dt$$

直徑分佈可以使用機率密度函數  $f(x, \theta_t)$  表示，而每單位面積的材積(V)則為株數 N 與母數  $\theta_t$  的函數  $V = f(N, \theta_t)$ ，其未來值  $V_t$  則為最初狀況  $V_0$  連續變化而得。同齡林分 t 時的材積  $V_t$  可以使用下式表示：

$$V_t = f(A, S_i, N_0) \dots \dots \dots (2)$$

A : 林齡

S<sub>i</sub> : 不隨時間改變的地位指數

N<sub>0</sub> : 每單位面積造林株數

未來某時間 t<sub>n</sub> 的材積可以下式表示：

$$V_{tn} = F(K, Y_{t\alpha}, V_{t\alpha}, t_\alpha, t_n) \dots \dots \dots (3)$$

$$t_n > t_\alpha \geq t_0 \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

t<sub>0</sub> : 初時

K : 不隨時間變動的林分變數

Y<sub>tα</sub> : t<sub>α</sub> 時的林分性態值的向量

V<sub>tα</sub> : 定義 [N<sub>tα</sub>, θ<sub>tα</sub>] 的向量

$$\therefore Y_{t\alpha} = f(V_{t\alpha})$$

$$\therefore V_{t\alpha} = F(K, V_{t\alpha}, t_\alpha, t_n) \quad \alpha = 0, 1, \dots, n-1 \dots \dots \dots (4)$$

其生長速率為：

$$dV_{t\alpha} / dt = f(K, V_{t\alpha}, t_\alpha, V_{t\alpha} / dt) \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (5)$$

上式在其獨立變數中不論有無林齡變數皆可使用。若是任何時間的林分直徑分佈，皆能很適當的以機率密度密數  $f(x, \theta_t)$  表示時，則 t<sub>n</sub> 及 t<sub>α</sub> 的 V<sub>tn</sub> 及 V<sub>tα</sub> 皆可依上述方法求出。

關於此法的應用可從同齡林及異齡林兩方面加以探討。

同齡林做預測時可由時間積分(time-integrated)的母數預測模式，即 Feduccia et al. (1979) 所謂的時間積分模式來計算，如下所示：

$$V_{t\alpha} = [N_{t\alpha}, \theta_{t\alpha}]$$

t<sub>α</sub> : 從造林後所經過的生長季節個數(林齡)

N<sub>tα</sub> : 到 t<sub>α</sub> 年每公頃所活存的株數

θ<sub>tα</sub> : 以 Weibull 函數(三個母數式)所描述的 t<sub>α</sub> 時直徑分佈

$$N_{t\alpha} = F_1(H_d, t_\alpha, N_0)$$

$$\theta_{t\alpha} = F_i(H_d, t_\alpha, N_{t\alpha}) \quad i = 2, 3, 4$$

N<sub>0</sub> : 每公頃的造林株數

$H_d: F_4(t_\alpha, S_i)$ ， $t_\alpha$ 時優勢木與次優勢木的平均樹高

$S_i$ ：地位指數

上式中之  $N_0$ 、 $S_i$  即(4)式中  $\underline{K}$  的元素，在  $t_0$  及  $t_\alpha$  時，其所經過的生長季節數目分別為 0 及  $\alpha$ 。

$$\therefore V_{t_\alpha} = F(S_i, N_{t_\alpha}, 0, \alpha)$$

$V_{t_\alpha}$ ：在  $t_\alpha$ 、 $H_d$ 、 $V_{t_\alpha}$  時的收穫量

在同齡林林分計算直徑分佈收穫量時常用此種測計技術，其所算出之值為  $V$  的時間積分值，亦即直接母數預測模式(PPM)所算出之值。

Smalley and Bailey (1974)，認為描述直徑分布的機率密度函數其母數  $\theta_t$  為林齡(A)、地位 ( $S_i$ )、優勢木、次優勢木之平均樹高( $H_d$ )，以為活存株數( $N_t$ )的函數：

$$\theta = F(A, S_i, H_d, N_t)$$

$$S_i = f_1(A, H_d) \quad A: \text{林齡}$$

$$N_t = f_2(A, S_i, H_0) \quad A_p: \text{栽植時苗木年齡}$$

$$Y = F(A, S_i \text{ 或 } H_d, N_0)$$

Feduccia et al. (1979)曾經使用下列函數式研究德達松人工林林木的生長：

$$\theta_t = f(\log H_d, \log A_p, \log N_t)$$

$$S_i = f(H_d, 1/A)$$

$$\log(N_0 / N_t) = f(A_p, \log N_t, H_d, \sqrt{H_d})$$

異齡林做預測時與同齡林的不同點，在異齡林內所選測之臨時樣區，其林齡無法確定，所以要靠永久樣區連續調查的資料來推算  $V$  以及  $dV/dt$  無平均量的變化情形。這種利用兩個時點  $t_0$ 、 $t_n$  間直徑分布母數的變化，來做未來母數預測的技術稱做時間微分(Time-different)的母數預測模式(PPM)。時間微分模式係指  $N_t$ 、 $\theta_t$  在隨時間經過之變化的累積結果。此種變化與異齡林在開始測定時的林分性態值有關。在兩時點  $t_0$  及  $t_n$  的林分性態值為已知時，機率密度函數的母數亦可決定，母數的平均變化情形可以由  $(\theta_n - \theta_{t_0}) / (t_n - t_0)$  算出。假如將時間縮短，即可應用瞬間變化的  $d\theta_t/dt$ 。

Hyink (1979)曾用此法，以 3 個母數式的 Weibull 函數，將位置母數(a)固定為 6.95，再利用本模式算出母數  $dV/dt$ 。因  $dV/dt$  包含  $dN/dt$  與  $d\theta/dt$ (在此分別表示單位面積株數及機率密度函數母數值的年平均變化)，若兩次調查的間隔為 5 年。

$$d\theta/dt = (\theta_5 - \theta_0)/5$$

$$dN/dt = (dI/dt) - (dM/dt)$$

$$dI/dt = I_5/5$$

$$dM/dt = M_5/5$$

$I_5$ ：測定期間 5 年內晉級生長(超過 7.0 英吋)的林木株數

$M_5$ ：測定期間 5 年內枯死的林木株數

$\theta_0$ 、 $\theta_5$ ：0 時和 5 年後描述林分直徑分布 Weibull 函數的母數 a, b, c



Hyink (1979)認為時間微分母數預測模式(PPM)在異齡林的模式建造上相當有效。

(三)母數回復模式：

直徑分佈法所用模式的  $V_t$  內包含  $N_t$  及  $\theta_t$  兩個因子，除能夠提供林分總值的資訊外，也可以掌握各個直徑級的材積分布情形，所以比全林分模式更能取得豐富的資訊。但是全林分模式所需要的林分性態值，一般較易取得，在做推算、預測時方便，可是其獲得的資訊有限，因此，Hyink (1980)發展出一種由林分平均收穫模式(或稱全林分模式)直接推算林分性態值，再利用所推算出的林分性態值求得直徑分布機率密度函數的母數，其目的在直徑分布法與林分平均收穫模式(Stand level yield model)中建立一個數學相容性(Mathematical compatibility)關係，而特將此法稱做母數回復模式(PRM)。

母數回復模式可由(1)式導出，如下所示：

$$Y_{ij} = Nt \int_{D_{ij}}^{D_{uj}} g_i(x) f(x, \theta_t) dx$$

$$= h_{ij}(N_j, \theta)$$

在(1)式的左右兩邊各乘上  $1 = \frac{fx(x, \theta)dx}{\int_{D_{ij}}^{D_{uj}} fx(x, \theta)dx}$

則可得出：

$$Y_{ij} = h_{ij}(N_j, \theta)$$

$$= Nt \int_{D_{ij}}^{D_{uj}} fx(x, \theta)dx \frac{\int_{D_{ij}}^{D_{uj}} g_i(x) fx(x, \theta)dx}{\int_{D_{ij}}^{D_{uj}} fx(x, \theta)dx}$$

$$= y_{ij}$$

對任何一組之  $h_{ij}(N_j, \theta)$ ，皆能得出  $N_j = Nt \int_{D_{ij}}^{D_{uj}} fx(x, \theta)dx$ ，也就是說單位面積的株數  $N_j$  與  $y_{ij}$  息息相關。若  $Y_{th}$  的範圍與  $fx(x, \theta)$  全域一致時，則  $N_j = N$ 。

若  $N_j$ 、 $Y_{ij}$  與第 1 到第(K-1)組  $\theta$  為已知時，則  $h_{ij}(N_j, \theta)$  內第 k 組的  $\theta$  可以求得如下：

$$\theta_k = F_k(Y_{ij}, N_j, \theta)$$

如果第 k 組  $h_{ij}(N_j, \theta)$  的  $(Y_{ij}, N_j)$  為已知時，且每一  $h_{ij}(N_j, \theta)$  非為其他組  $h_{ij}(h_j, \theta)$  的線性組合，則可得出：

$$\theta_1 = F_1[(Y_{ij}, N_j)_1, \theta]$$

$$\theta_2 = F_2[(Y_{ij}, N_j)_2, \theta]$$

⋮

$$\theta_k = F_k[(Y_{ij}, N_j)_k, \theta]$$

在  $[(Y_{ij}, N_j)_m, m = 1, \dots, k]$  下，有唯一  $\theta$  解，倘若  $[(Y_{ij}, N_j)_m, m = 1, \dots, k]$  的直徑分佈皆能用  $fx(x, \theta)$  很適當的描述時，則以(二)模式系統的  $Y_{ij}$  可由全林分平均性態值決定，再由  $Y_{ij} = h_{ij}(N_j, \theta)$

的關係回復得知，描述直徑分佈之機率密度函數的母數( $\theta$ )。

Mathey and Sullivan (1982)以同樣的觀念，研究德達松人工林的生長收穫。首先以初期林分的性態值來計算單位面的(1)活存株數，(2)現存及預測斷面積，(3)現存及預測材積；再以預測所得之斷面積及材積值，利用上式恆等式反覆計算，以求得  $f(D)$ 的機率密度函數母數。

若上式材積相等時，則直徑級之林分收穫式可以使用  $h_{ij}(N_j, \theta) - Y_{ij} = 0$  式表示，若以非線性函數聯立解(simultaneous nonlinear function)的解題計巧處理，則  $\theta$  的向量可以決定，即  $\theta$  可由  $K$  組( $Y_i, N_j$ )對來回復(recovered)，亦即  $g_i(x)$  在  $j+h$  直徑級間的期望值等於  $Y_{ij}$ ，所以( $N_{ij}, N_j$ )對可由現存的平均收穫模式或由 PRM 發展出的林分平均模式來求得。假如能由適當描述直徑分佈的  $f(x, \theta)$  資料發展出具有生物意義的模式，則 PRM 必能做林分分析之用。

#### IV、研究材料與方法

##### (一)研究材料

研究材料係取自林相變更之 7,644 公頃柳杉人工林，平均每 25 公頃逢機抽取一個 0.02 公頃的圓形樣區，共取 328 個，遍佈全省，共有烏來、竹東、八仙山、濁水溪、巒大、阿里山、荖濃溪、大武、玉里、秀姑巒、林田山、和平、宜蘭等 15 個事業區。樣區包括直徑樣區及樹高樣區，如表 1 所示。各林分之年齡、胸高直徑、樹高等林分性態值如表 2 所示。

表 1 樣區之分佈

林管處事業區	面積(ha)	直徑樣區	樹高樣區
文山烏來	393	26	14
竹東竹東	1,741	76	37
大湖	163	7	2
八仙山	100	2	1
埔里濁水溪	41	2	0
巒大巒大	196	6	3
玉山阿里山	1,192	54	18
楠濃荖濃溪	85	6	1
關山大武	106	7	2
玉里玉里	1,221	33	17
秀姑巒	551	26	12
木瓜林田山	312	10	3
蘭陽和平	676	24	1
太平山	667	45	7
宜蘭	194	4	0
合計	7,664	328	118

表 2 各林分之性態值

事業區	年齡	胸高直徑(cm)	樹高(m)
-----	----	----------	-------

	最大	最小	平均	最大	最小	平均	最大	最小	平均
烏來	9	7	8	18.2	1.0	7.2	10.3	1.9	5.8
竹東	18	7	12	40.6	2.3	13.0	21.5	2.1	9.3
大湖	10	8	9	18.8	1.9	9.5	13.2	3.0	7.1
大安溪	17	17	17	16.0	4.1	9.4	10.1	3.9	7.0
八仙山	10	10	10	20.3	4.5	10.8	12.0	4.2	7.7
濁水溪	15	15	15	24.0	5.2	12.0	13.5	4.6	8.3
巒大	12	10	11	28.0	4.9	14.0	13.8	4.1	9.0
阿里山	21	9	12	30.0	0.9	11.6	15.6	2.0	8.2
荖濃溪	10	9	10	17.4	4.2	9.0	7.6	4.0	6.8
大武	13	12	13	16.1	6.5	11.6	11.0	5.4	8.1
玉里	13	10	12	51.3	4.4	14.7	19.6	2.5	9.9
秀姑巒	13	8	9	43.3	2.5	13.9	19.3	3.0	8.5
林田山	13	9	10	33.3	4.0	8.3	14.0	1.5	6.8
和平	14	8	10	26.9	4.8	14.0	12.5	3.5	9.5
太平山	15	9	12	32.5	0.8	11.9	14.2	1.1	8.4
宜蘭	8	8	8	15.7	4.6	9.7	9.7	4.3	7.1

## (二)研究方法

### 1、直徑分佈法

使用直徑分布法推算及預測林分材積的步驟列述如下：

- (1)測計林分內各株立木的胸高直徑。
- (2)選擇能夠適當描述直徑分佈的機率密度函數  $f(x, \theta_i)$ —Weibull 函數。
- (3)利用最大概似法(Maximum Likelihood)求解 Weibull 函數的三個母數 a, b, c。
- (4)根據實地調查結果或適當的林木活存函數，求得 t 時之單位面積的林木株數  $N_t$ 。
- (5)由(3)求得某一區間的分佈函數，再應用(4)求得  $N_t$ ，由此求得某一直徑級(D)的林木株數  $N_t = \int f(x, \theta_i) dt$ 。
- (6)使用羅、馮(1985)所求出之樹高曲線式  $H = \exp(0.393170 + 0.692453 \times \ln D)$ ，及材積式  $V = 5.979663 \times 10^{-5} (D^{1.87533}) H^{0.974340}$  計算樹高及材積，以求得各直徑級的單木材積。
- (7)單木材積乘上直徑級的林木株數求得直徑級的單位面積材積。
- (8)累加各直徑級的材積，求得單位面積的總材積。
- (9)再利用各級之單位面積的材積，乘上總面積，求得林分內各直徑級的材積以及全部材積。

### 2、母數預測模式

- (1)應用直徑分布法求得各個樣區之直徑分佈機率密度函數的母數 a, b, c，再求出其林齡、平均直徑、每公頃林木株數、每公頃的斷面積、材積。
- (2)求出地位指數。
- (3)利用每公頃的林木株數( $N_t$ )與林分性態值如林齡、優勢木樹高、地位、最大直徑、

### 平均徑值歸析

(4)利用各機率密度函數之母數與(2)的林態值歸析。

### 3、母數回復模式

使用本式做推算及預測時，可以分成兩個步驟：(1)使迴歸術靠選樹林級之性態值，(2)利用迴歸術求得之林分平均胸高直徑、林分斷面積及材積來決定 Weibull 函數之母數及其直徑分佈。

(1)林分平均收穫模式：本模式包括：

- ①林分性態值。
- ②以現時(A<sub>1</sub>)的密度(D<sub>1</sub>)，來推算未來(A<sub>2</sub>)的林分密度(D<sub>2</sub>)。
- ③樹高曲線 H=f(D)。
- ④單株材積式 V=f(D, H)。
- ⑤地位指數。
- ⑥平均收穫模式：Y=f(A, S, D<sub>s</sub>)。

(2)由平均收穫模式得到的林分平均胸高直徑( $\hat{D}$ )、林分斷面積( $\hat{BA}$ )、林分材積( $\hat{V}$ )，利用非線性最小二乘法，先設定 a 及 c 初值，再利用下列式：

$$\hat{D} = \int_0^{\infty} xf(x)dx$$

$$\hat{D} = a + b\Gamma(1+1/c) \Rightarrow b = \frac{(\hat{D}-a)}{\Gamma(1+\frac{1}{c})}$$

$$\Gamma(x) = \text{gamma 函數 } \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$b = (\hat{D}-a) / \Gamma(1+1/c)$$

算出 a, b, c 值。

林分斷面積及林分材積亦可做同樣的計算，如下所示：

$$\hat{BA} = (1/10,000)N \int x^2 f(x)dx$$

$$BA = 0.0001N \sum x_i^2 f_i$$

$$f_i = F(x_i + 0.5) - F(x_i - 0.5)$$

第 i 級林木所佔機率

$$F(x) = 1 - \exp\{[(x-a)/b]^c\}$$

### V、結果分析與討論

#### (一)直徑分佈：

因 Weibull 函數母數具幾何意義及累積分佈函數求解較易，以及適於配合直徑分佈等優點，所以利用 Weibull 函數來配合直徑分布，求解其母數。柳杉人工林林木直徑分布配合結

果，經過 K-S 測驗結果  $D_n$  值皆在  $\alpha = 0.05$  顯著水準下，接受來自相同分佈的擬說。

(二)柳杉人工林不同年齡的直徑分佈

配合 Weibull 函數算出母數推算值及其分佈曲線變化情形，如表 3 及圖 1 所示。結果顯示直徑分佈隨林齡增加其分佈右移，且峰度愈來愈小愈平坦。

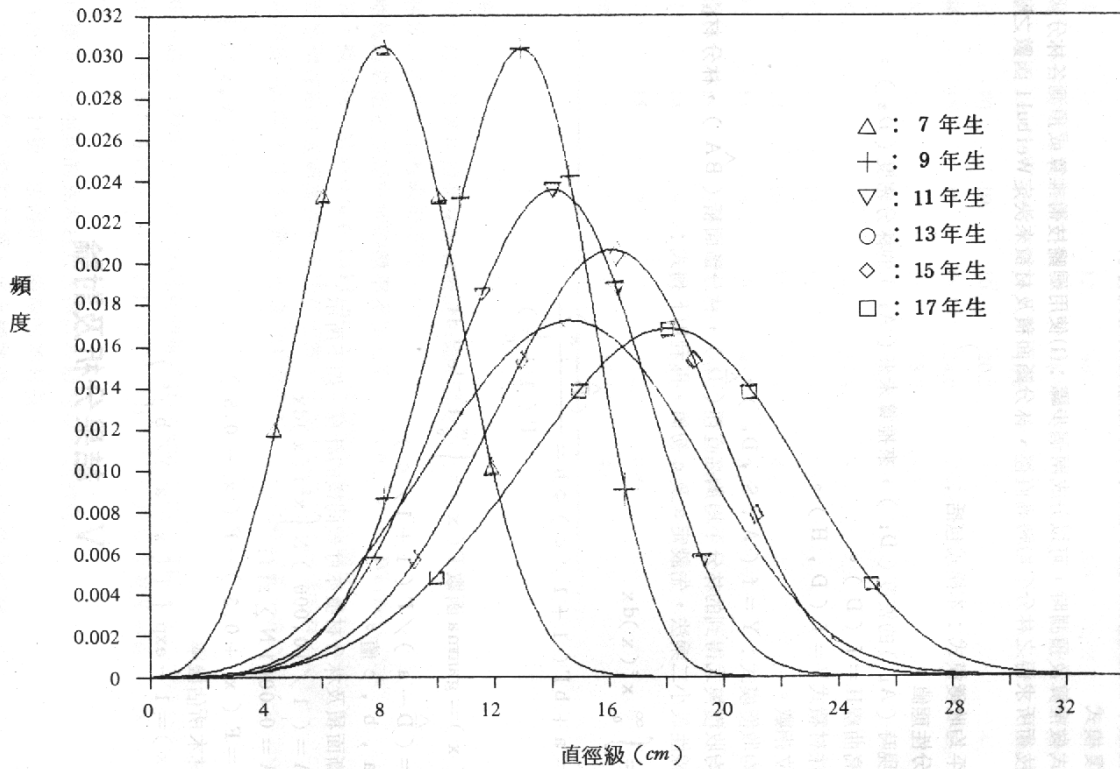


圖 1 Weibull 函數配合不同林齡柳杉人工林直徑分佈之變化情形

表 3 Weibull 函數配合不同年齡柳杉人工林直徑分佈之母數推算值

林齡 母數推算值	7	9	11	13	15	17
b	9.0203	13.5418	14.9246	16.1125	17.0765	19.3276
c	3.5833	5.4933	4.6606	3.6180	4.6735	4.2942

(三)直徑分佈法：直徑分佈法的代表模式如下：

$$Y_{ij} = Nt \int g(x)f(x, \theta)dx$$

$Y_{ij}$ ：單位面積內某一直徑級的材積

$Nt$ ：單位面積內的林木株數

$g(x)$ ：胸高直徑的函數(如樹高曲線式及或材積式)

$f(x, \theta)$ ：描述直徑分佈的機率密度函數

現在使用 15 年生柳杉林木樣區來說明計算步驟及所得結果如下：

(1)應用 Chen and Rose (1978)以最大概似法(maximum likelihood)所編寫之程式，後經陳念

軍(1988)修改適合於 PC 使用之求解兩個母數之 Weibull 機率密度式。

- (2)或直接将直徑資料在 Lotus 123 或 PE2 建檔後，送入 STATGRAPHICS 程式集成 ASF 檔，再利用 STATGRAPHICS 內的 “distribution fitting” 的 Weibull 函數來求解 b, c 值，再做最佳配合度試驗，求得  $b=17.0765$ ， $c=4.6795$ ，K-S 測驗求得在  $\alpha=0.05$  下接受觀測林分直徑分佈是 Weibull 函數分佈的擬說。
- (3)樣區面積為 0.02 公頃，所以樣區內 29 株林木，表示每公頃有 1,098 株。利用此項結果依照(1)及(2)的步驟求得母數(b, c)的分段分佈函數式  $f(x, \theta)$  為：

$$N_i \cdot f(x, \theta) = 1098 \cdot \{ \exp[-(L/17.0765)^{4.6735}] - [-(U/17.0765)^{4.6735}] \}$$

於是求得各直徑級的林木株數，例如 10~12 公分直徑級的株數為 168 株。

- (4)利用樹高曲線式  $H=\exp(0.39317+0.692453 \log(D))$ 求得各直徑級的樹高，例如在 10~12 公分級，其平均直徑 11 公分之樹高為 3.06 公尺，再利用材積式  $V = 0.0000598 \cdot (D^{1.87533} \cdot H^{0.97434})$  及 Meyer 修正係數 1.015253，求得單株材積及直徑級材積，例如平均直徑 11 公分的材積為  $0.019988m^3$ ，10~12 公分級之材積為  $3.355388 m^3$ 。
- (5)各直徑級累加，即可求得每公頃的材積  $34.6335m^3$ ，詳細計算結果如表 4 所示。

表 4 15 年生柳杉樣區各直徑級之材積分析

樹種：柳杉 位置母數 A：0.000000 面積：0.0200 公頃  
 林齡：15 大小母數 B：17.076500 樣區株數：29  
 形狀母數 C：4.673500 每公頃株數：1,098

胸高直徑		理論機率 (P <sub>i</sub> )	每公頃株數 (N*P <sub>i</sub> )	累積株數 (NP <sub>i</sub> +NP <sub>i-1</sub> )	平均 直徑 (cm)	平均 樹高 (m)	單木材積 (m <sup>3</sup> )	每公頃材積 (m <sup>3</sup> /ha)	每公頃累 積材積 (m <sup>3</sup> /ha)
下限	上限								
0	2	0.003223	3.539	3.538529	1	1.60	0.000143	0.000507	0.005
2	4	0.020747	22.780	26.318959	3	2.15	0.001376	0.031355	0.0319
4	6	0.051944	57.035	83.353594	5	2.47	0.003941	0.224770	0.2566
6	8	0.090784	99.681	183.034222	7	2.71	0.007880	0.785482	1.0421
8	10	0.127972	140.514	323.547835	9	2.90	0.013222	1.857838	2.9000
10	12	0.152890	167.874	491.421529	11	3.06	0.019988	3.355388	6.2553
12	14	0.157623	173.070	664.491901	13	3.20	0.028195	4.879645	11.1350
14	16	0.140877	154.683	819.174833	15	3.32	0.037857	5.855860	16.9908
16	18	0.108938	119.613	938.788239	17	3.44	0.048988	5.859605	22.8505
18	20	0.072479	79.582	1018.369875	19	3.54	0.061598	4.902035	27.7525
20	22	0.041172	45.207	1063.577012	21	3.64	0.075696	3.422005	31.1745
22	24	0.019791	21.730	1085.307323	23	3.73	0.091292	1.983812	33.1583
24	26	0.007971	8.753	1094.059837	25	3.82	0.108394	0.948724	34.1070
26	28	0.002663	2.924	1096.983395	27	3.90	0.127010	0.371321	34.4783
28	30	0.000730	0.801	1097.784599	29	3.97	0.147146	0.117894	34.5962
30	32	0.000162	0.178	1097.962777	31	4.04	0.168808	0.030078	34.6263
32	34	0.000029	0.032	1097.994574	33	4.11	0.192003	0.006105	34.6324

34	36	0.000004	0.005	1097.999076	35	4.18	0.216737	0.000976	64.6334
36	38	0.000000	0.001	1097.999576	37	4.24	0.243014	0.000122	34.6335
38	40	0.000000	0.000	1097.999619	39	4.30	0.270841	0.000012	34.6335
40	42	0.000000	0.000	1097.999622	41	4.36	0.300221	0.000001	34.6335
42	44	0.000000	0.000	1097.999622	43	4.42	0.331159	0.000000	34.6335
44	46	0.000000	0.000	1097.999622	45	4.47	0.363661	0.000000	34.6335
46	48	0.000000	0.000	1097.999622	47	4.53	0.397729	0.000000	34.6335
48	50	0.000000	0.000	1097.999622	49	4.58	0.433369	0.000000	34.6335

備註：樹高曲線式： $H = \exp(0.393170 + 0.692453 \log(D))$

材積式： $V = 0.0000598 \cdot (D^{1.87533} \cdot H^{0.97434})$

(四)母數預測模式

母數預測模式的林分性態值(變數)及母數的含義

函數的母數，每一模式尚包括時間(林齡)變數，能對未來之時間序列點做一系列的推算及預測，其所使用之林分性態值(變數)及母數的含義，如表 5 所列。

表 5 模式所用變數之代號及其意義

A	: t 時的林齡
$N_t$	: t 時的每公頃林木株數
$D_{min}$	: 林分最小胸高直徑(cm)
$D_{mean}$	: 林分平均胸高直徑(cm)
$D_{max}$	: 林分最大胸高直徑(cm)
$H_d$	: 林分優勢木樹高(m)
$S_i$	: 基準林齡為 50 之柳杉地位指數
BA	: 由直徑分佈法算出之各林分每公頃斷面積( $m^2/ha$ )
V	: 由直徑分佈法算出之每公頃材積( $m^3/ha$ )
BCA	: 由平均胸高直徑算出之平均斷面積( $m^2$ )
ln	: 自然對數
a	: Weibull 機率密度函數的位置母數
b	: Weibull 機率密度函數的大小母數
c	: Weibull 機率密度函數的形狀母數

地位指數為利用 Richards 一般化曲線來配合各林分優勢木樹高對林齡的相對位置，並利用曲線配合方法求得各曲線。從曲線式： $H = W\{1 - B \exp[-k(t - t_0)]\}^{\frac{1}{1-m}}$  得知，W 為其漸近值 (asymptotic value)，亦即曲線的最高值，也就是生育地所能提供的林木生長最大潛能，所以在母數值相同下，隨 W 值的不同，能夠組成一組曲線。如圖 2 所示。其他母數：k 表生長速率， $t_0$  表達到 DBH 的林齡，m 表曲線變遷速率。在求得最適母數預測模式如表 6 所列。

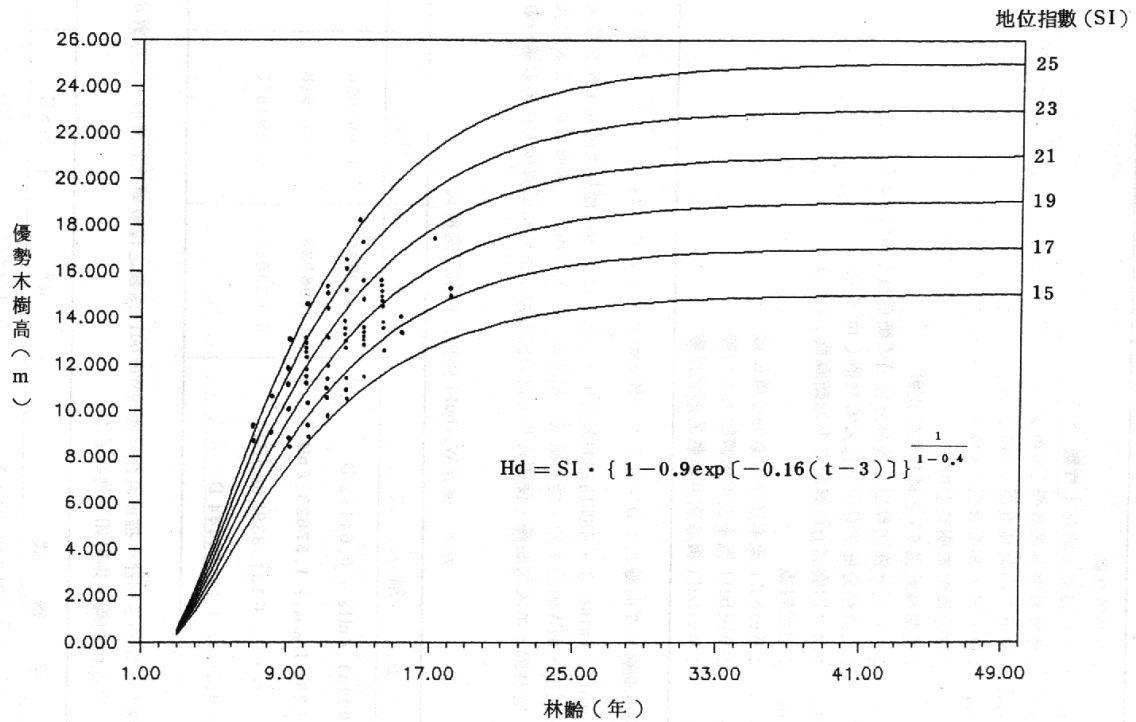


圖 2 柳杉地位曲線

表 6 使用 Weibull 函數之母數預測模式

迴歸式	R <sup>2</sup>	MSE	Df
a = -4.93241 lnH <sub>d</sub> + 0.64182D	0.462985	1.995650	77
b = 1.015291 D <sub>mean</sub> + 1.57623 ln H	0.998038	0.019618	77
c = -42.4362 H <sub>d</sub> + 151.83936 ln H + 0.55095 D <sub>mean</sub> + 11.64444D	0.633021	0.593553	75

爲了瞭解在時間的序列裡，描述直徑分佈的 Weibull 函數之母數變化的情形，以母數 a, b, c 與齡 (A) 來配合曲線，則得如下列結果：

迴歸式	R <sup>2</sup>	MSE	Df
log a = 0.555 + 0.505246 log A	0.328874	0.304522	79
log b = 1.0133 + 0.694833 log A	0.654616	0.168424	79

b 與林齡的曲線配合情形由圖 3 所示，c 值與林齡(A)似乎較無顯著的相關，其相關關係(γ = -0.12051)。



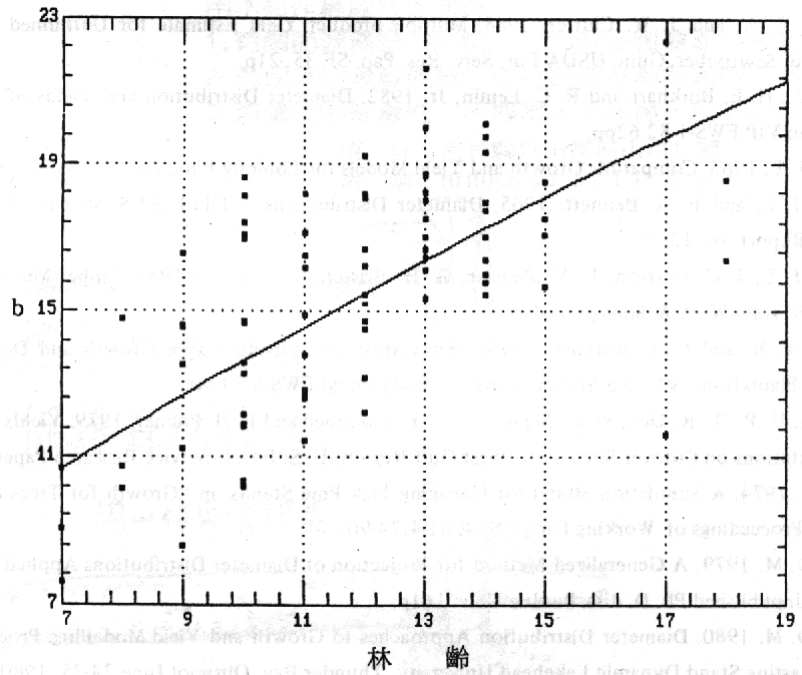


圖 3 Weibull pdf 母數 b 與林齡的關係

圖 3 Weibull pdf 母數 b 與林齡的關係

(五)母數回復模式

母數的求解係利用平均收穫模式(或稱全林分模式)所預測的林分平均收穫值，求算 pdf 的數所採取的建為法驅使迴歸結果表 7 所示。再再利用王森田(1988)編寫之程式算出 Weibull 之 pdf 的 b、c 值。

表 7 全林橫迴歸析

迴歸式	R <sup>2</sup>	MSE	Df
$\ln V = 0.00036 N_t + 0.16637 H_d$	0.642648	0.08939	77
$\ln BA = 0.00038 N_t - 0.50992 H_d + 7.57140 \ln H_d$	0.426907	0.12640	76
$D_{mean} = 0.22572 A - 0.00109 N_t - 2.74376 H_d + 45.81003 \ln H_d$	0.728097	2.34854	75

根據以上所求得之母數預測模式及母數回復模式的實驗式，即可算出全林任何年齡及任何地位級的生長與收穫以及其直徑分布狀態，即得不同材種的生長量及材積量，可以做為林業經營及林木育種的基本參考資料。

VI、展望

(1)利用臨時樣區調查資料建立生長模式時，常常無法掌握其生長歷史過程，以致其影響生長的因子不能確切加以處理，所以結果常不理想。希望將這些模式以永久樣區的資料分析驗證，相信對模式的建立更具決定性的價值。

(2)母數預測模式及母數回復模式所求得的母數之間的差異，利用永久樣區資料驗證，並對其偏差的原因加以詳細探討分析，以做為提供改進模式建立技巧的參考。

## VII、引用文獻

- 1.孔繁浩，1987，生長模式在林木遺傳育種上之應用，林學季刊，20(1):1-6.
- 2.羅紹麟、馮豐隆，1985，林相變更之柳杉人工林的林分構造與收穫，興大實驗林研究報告，6:73-91.
- 3.楊榮啓、林文亮，1978，Weibull 機率密度函數式及其在林業上的應用，台灣林業，4(5):9-16.
4. Bailey, R. L. and T. R. Dell. 1973. Quantifying Diameter Distribution with the Weibull Function. For. Sci. 19:97-104.
5. Bailey, R. L. 1980. Individual Tree Growth Derived from Diameter Distribution Models. For. Sci. 26(4):621-632.
6. Bella, I. E. 1971. A New Competition Model for Individual Trees. For. Sci. 17:364-372.
7. Bennett, F. A. and J. W. Clutter. 1968. Multiple-product Yield Estimate for Unthinned Slash Pine Plantation-Pulpwood, Sawtimber, Gum. USDA For. Serv. Res. Pap. SE-35, 21p.
8. Cao Q. V., H. E. Burkhart and R. C. Lemin, Jr. 1982. Diameter Distribution and Yields of Thinned Loblolly Pine Plantation VIP FWS-1-82 62pp.
9. Clutter, J. L. 1963. Compatible Growth and Yield Models for Loblolly Pine. For. Sci. 9(3):354-371.
10. Clutter, J. L. and F. A. Bennett. 1965. Diameter Distributions in Old-Field Slash Pine Plantation. Ga. For. Res. Council Report No. 13.
11. Clutter, J. L., J. C. Fortson, L. V., Pienaar., G. H. Brister., R. L. Bailey. 1983. Timber Management- A Quantitative Approach. John Wiley & Sons P. 89-139.
12. Daniels, A. N., and H. E. Burkhart. 1975. Simulation of Individual Tree Growth and Development in Managed Loblolly Plantations. VPI and State University, Blacksburg. FWS-5-79 50p.
13. Feduccia, D. P., T. R. Dell., W. F. Mann, Jr., T. E. Campbell and B. H. Polmer. 1979. Yields of Unthinned Loblolly Pine Plantations on Cutover Sites in the West Gulf Region. U. S. Forest Service Research Paper SO-148 88p.
14. Hegyi, F. 1974. A Simulation Model for Managing Jack Pine Stands, in "Growth for Trees and Stand Simulation" IUFRO, Proceedings of Working Party. S. 4. 01-4:74-90.
15. Hyink, D. M. 1979. A Generalized Method for Projection of Diameter Distributions Applied to Uneven-aged Forest Stands. Unpublished Ph. D. diss. Purdue Univ. 161p.
16. Hyink, D. M. 1980. Diameter Distribution Approaches to Growth and Yield Modelling. Proceedings of a Workshop on Forecasting Stand Dynamics Lakehead University, Thunder Bay, Ontario, June 24-25, 1980.
17. Mackinney, A. L., F. X. Schumacher and L. E. Chaiken. 1937. Construction of Yield Tables for Non-normal Loblolly Pine Stands. J. Agric. Res. 54:531-545.
18. Matney, T. G. and A. D. Sullivan. 1982. Compatible Stand and Stock Tables for Thinned Loblolly Pine Stands. For. Sci. 28(1):161-171.

19. Moser, J. W., Jr. and O. F. Hall. 1969. Deriving Growth and Yield Function for Uneven-aged Forest Stands. *For. Sci.* 15:183-188.
20. Moser, J. W., Jr. 1972. Dynamics of An Uneven-aged Forest Stand. *For. Sci.* 18:184-191.
21. Smalley, G. W., and R. L. Bailey. 1974. Yield Tables and Stand Structure for Loblolly Pine Plantations in Tennessee, Alabama and Georgia Highlands. USDA Forest Serv. Res. Pap. SO-96, 81p. South Forest Exp. Stn. New Orleans, La.
22. Shugart, H. H. and D. C. West. 1980. Forest Succession Models. *Bioscience* 30(5):308-313.
23. Stage, A. R. 1973. Prognosis Model for Stand Development. V. S. For. Science Res. Paper NT-137.
24. Strub, M. R. and H. E. Burkhart. 1975. A Class Interval-free Method for Obtaining Expected Yield from Diameter Distribution. *For. Sci.* 21:67-69.
25. Wensel, L. C. and P. J. Daugherty. 1984. CACTOS Users Guide: The California Conifer Output Simulator. Version 1.0 Res. Note 10 Northern California Forest Yield Cooperative Dept. of For. And Resource Management, U. of California, Berkeley.