

# 降雨入滲引發土體崩塌之數值分析

詹錢登<sup>[1][2]\*</sup> 陳新霖<sup>[1]</sup> 楊斯堯<sup>[1]</sup>

**摘要** 崩塌係指土體受重力作用沿坡面向下運動的現象。本研究以牛頓第二運動定律為基礎，考量降雨入滲對土體的影響，建構無限邊坡土體崩塌模式，然後將降雨入滲水所生超額孔隙水壓以擴散方程式來描述其傳遞方式；以柴比雪夫多項式求解法，分析超額孔隙水壓的傳遞情形，從而分析土體是否會發生崩塌。結果顯示土壤參數條件將影響土體崩塌所需的坡度與超額孔隙水壓；降雨入滲特性影響超額孔隙水壓的傳遞情形，從而影響土體崩塌時間。本研究也比較降雨入滲特性及降雨過程中地下水位增加對土體崩塌之影響。

**關鍵詞：**崩塌、降雨入滲、超額孔隙水壓、柴比雪夫法。

## Numerical Analysis on Landslide of an Inclined Soil Layer Caused by Rain Infiltration

Chyan-Deng Jan<sup>[1][2]\*</sup> Shin-Lin Chen<sup>[1]</sup> Ssu-Yao Yang<sup>[1]</sup>

**ABSTRACT** Landslides are the downslope mass movement caused by gravity on hillsides. In this study, we developed a landslide model that describes a block sliding down an infinite slope governed by Newton's equation of motion, considering the block weights, its internal excess pore pressure and friction. This numerical model considers pore pressure evolution within a soil layer under rain infiltration obeys diffusion equation, numerically solved by the Chebyshev polynomial method. Results show that the critical soil-layer slope, critical excess pore pressure, and the time to reaching landslide occurrence are controlled by soil properties and rainfall infiltration intensity. We also investigated the effects of rainfall infiltration characteristics and the variation of groundwater level on landslide triggering.

**Key Words:** Landslide, Rainfall infiltration, Excess pore pressure, Chebyshev method.

### 一、前言

台灣位於菲律賓海板塊和歐亞大陸板塊的交界邊界，地質年輕陡峭破碎，地震頻繁容易造成土層鬆動，而且地理位置處於副熱帶與熱帶氣候區之間，年平均雨量約 2,500 毫米，降雨充沛且集中，因此每逢颱風及豪雨事件，常引發坡地土沙災害及洪水災害。尤其是 1999 年 921 大地震的影響，震央位於台灣中部，地震力使土壤形變、結構受到擾動，使得近年來坡地土沙災害愈趨頻繁。因此坡地崩塌相關的研究已成為台灣近年來的重要研究課題。

前人研究結果顯示降雨入滲後造成土體孔隙水壓急速的上升，土體的有效應力下降，使得土體內的摩擦力也跟著降低，甚至造成崩塌滑動 (Tan *et al.*, 1987; Pradel and Raad, 1993; Iverson, 2000; 鄭佳元, 2009; Wang and Sassa, 2003; Tsai *et al.*, 2006)。降雨入滲並非造成崩塌唯一的因素，坡地崩塌事件的發生有時可能是因為地下水位升高所造成的。地下水位升高時，水從土壤底層岩盤破碎帶滲出後進入土體，形成岩盤底部出滲，降低土體有效應力下降及土體摩擦力，因而產生崩塌滑動現象 (Jan *et al.*, 2016; Brönnimann *et al.*, 2013; 陳冠翰, 2011; 柯傑

夫等人, 2011; 簡鍾凱, 2014; 洪唯峰, 2015)。本論文以數值模擬方法探討降雨入滲和岩盤出滲對坡地崩塌運動之影響。

為了解降雨入滲與岩盤出流入滲是否對崩塌位址有影響，本研究以牛頓第二運動定律為基礎，建構無限邊坡土體崩塌的運動方程式。入滲水所生超額孔隙水壓的傳遞方式以擴散方程式來描述，並以柴比雪夫多項式求解法分析超額孔隙水壓的傳遞情形，然後分別探討降雨入滲與岩盤出流入滲對土體崩塌之影響。

### 二、模式建立

#### 1. 基本方程式

本研究使用牛頓第二運動定律為模式基礎 (Iverson, 2005; Schaeffer and Iverson, 2008)，加入降雨入滲及岩盤出流入滲為邊界條件。入滲水所生超額孔隙水壓的傳遞方式以擴散方程式來描述，建立一個無限邊坡理論之坡地崩塌數學模式，探討降雨入滲與岩盤出流入滲強度及入滲總量對崩塌行為之影響。

為了簡化問題，考量邊坡為無限邊坡，假設土體運動為剛體運動，如圖 1 所示。

[1] 國立成功大學水利及海洋工程學系

Department of Hydraulic and Ocean Engineering, National Cheng Kung University, Tainan 701, Taiwan, R.O.C.

[2] 國立成功大學水土保持生態工程研究中心

Department of Ecological Soil and Water Conservation Research Center, NCKU, Tainan 701, Taiwan, R.O.C.

\* Corresponding Author. E-mail: cdjan@mail.ncku.edu.tw

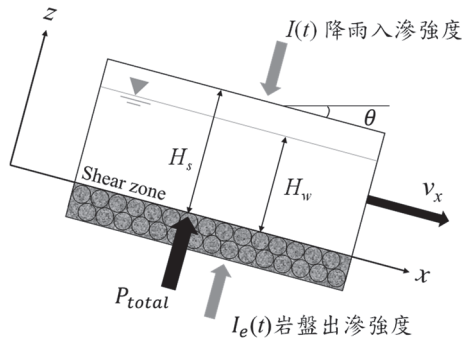


圖 1 坡面上可滑動土體示意圖、相關符號及坐標及坡面土體表面降雨入滲及底部岩盤出流示意圖

**Fig.1 Potential sliding soil body on an inclined plane, and related symbols and coordinates and diagram for rainfall and bottom infiltrations.**

當土體沿著邊坡方向的重量分量大於底部摩擦力時，土體開始滑動；利用牛頓第二運動定律來描述土體滑動後的運動行為，如下列方程式所示，

$$\underbrace{(\rho_s H_s + \phi \rho_w H_w) A}_{\text{滑動面上方土體質量}} \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{\text{加速度}} = \underbrace{(\rho_s H_s + \phi \rho_w H_w) g A \sin \theta}_{\text{滑動面上方土體沿坡面之重量分量}} - \underbrace{\mu A \left[ \underbrace{(\rho_s H_s + \phi \rho_w H_w) g \cos \theta}_{\text{滑動面土體垂直重量分量}} - \underbrace{P_{total}(z=0, t)}_{\text{土體底部總孔隙水壓力}} \right]}_{\text{滑動面摩擦阻力}} \quad (2.1)$$

其中  $\rho_s$  為土壤的乾容密度 (Dry bulk density);  $\rho_w$  為水的密度,  $H_s$  為移動土體的厚度;  $H_w$  為地下水位;  $\phi$  為土體孔隙率;  $A$  為分析所考量土體的底面積;  $\mu$  為摩擦係數,  $\mu = \tan^{-1}(\phi_0) \cdot \phi_0$  為土體的摩擦角;  $v_x$  為土體沿著坡面方向的滑動速度;  $g$  為重力加速度;  $\theta$  為土體斜坡與水平面的夾角 (坡面的坡角);  $P_{total}(z=0, t)$  為土體底部總孔隙水壓力, 靜水壓力及超額孔隙水壓力。

坡面崩塌的臨界條件為

$$\underbrace{(\rho_s H_s + \phi \rho_w H_w) g A \sin \theta}_{\text{滑動面上方土體沿坡面之重量分量}} = \underbrace{\mu A \left[ \underbrace{(\rho_s H_s + \phi \rho_w H_w) g \cos \theta}_{\text{滑動面土體垂直重量分量}} - \underbrace{P_{total}(z=0, t)}_{\text{土體底部總孔隙水壓力}} \right]}_{\text{滑動面摩擦阻力}} \quad (2.2)$$

在沒有降雨入滲及沒有岩盤出流入滲的情況下, 不發生崩塌的臨界坡面坡度  $\theta_{cr}$  為

$$\theta_{cr} = \tan^{-1} \left[ \mu \frac{\rho_s H_s - (1 - \phi) \rho_w H_w}{\rho_s H_s + \phi \rho_w H_w} \right] \quad (2.3)$$

或寫成

$$\frac{\tan \theta_{cr}}{\tan \phi_0} = \frac{1 - (1 - \phi) \frac{\rho_w H_w}{\rho_s H_s}}{1 + \phi \frac{\rho_w H_w}{\rho_s H_s}} \quad (2.4)$$

## 2. 超額孔隙水壓擴散方程式

由坡面土體崩塌的臨界條件[(2.2) 式]可以看出土體底部水壓力會影響崩塌的發生與否。因此若想要探討崩塌的特性,

需先了解孔隙水壓在土體中傳遞的行為。本研究利用線性疊加原理, 先將土體深度方向不同位置之總孔隙水壓力  $P_{total}(z, t)$  分成兩個部分: 靜水壓力  $P_s(z, t)$  及入滲超額孔隙水壓  $P_e(z, t)$ , 即

$$P_{total}(z, t) = P_s(z, t) + P_e(z, t) \quad (2.5)$$

為了簡潔些, 若非必要, 以下省略  $(z, t)$ , 僅直接以  $P_{total}$ 、 $P_s$  及  $P_e$  表達所代表之壓力意義。垂直坡面方向位置  $z$  的靜水壓為

$$P_s = \begin{cases} 0, & \text{for } H_w < z \leq H_s \\ \rho g (H_w - z) \cos \theta, & \text{for } 0 \leq z \leq H_w \end{cases} \quad (2.6)$$

本文先處理探討降雨入滲與岩盤出流入滲所產生的超額孔隙水壓。當土體發生崩塌滑動之後, 土體還會承受滑動超額孔隙水壓, 這一部分留待以後再討論。本研究採用美國地質調查研究所 (US Geological Survey) Iverson 所推導之擴散方程式來描述總孔隙水壓的傳遞特性 (Iverson, 2005), 即

$$\frac{\partial P_{total}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P_{total}}{\partial z^2} \quad (2.7)$$

其中  $D$  為水壓的擴散係數。

靜水壓為垂直坡面方向位置  $z$  的一次線性關係式, 二次微分後為零。因此, 實際上僅需探討入滲超額孔隙水壓的擴散行為。考量土體內超額孔隙水壓的來源是來自於降雨的入滲壓力及土體底部岩盤出流入滲到土體的水壓力。考量超額孔隙水壓為位置與時間的函數, 並以擴散的方式在土體中傳遞。假設土體為密實土體, 土體內水的流動遵循達西定律, 由此可以推導出土體上層降雨入滲邊界條件及土體底部岩盤出滲邊界條件。假設在土體內降雨入滲及土體底部岩盤出流入滲發生之前, 土體內超額孔隙水壓的初始值為零 (初始條件)。因此土體內超額孔隙水壓的擴散方程式為

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P_e}{\partial z^2} \quad (2.8)$$

邊界條件為

$$\frac{\partial P_e(z, t)}{\partial z} = \frac{\rho_w g}{K} I(t) \quad \text{at } z = H_s \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial P_e(z, t)}{\partial z} = -\frac{\rho_w g}{K} I_e(t) \quad \text{at } z = 0 \quad (2.10)$$

起始條件

$$P_e(z, t) = 0 \quad \text{at } t = 0 \quad (2.11)$$

其中  $K$  為水力傳導度,  $I(t)$  為降雨入滲強度,  $I_e(t)$  為岩盤出流強度。

## 3. 無因次超額孔隙水壓方程式

本研究使用柴比雪夫配置法求解前述控制方程式。使用柴比雪夫配置法之前需將控制方程式進行無因次化。本研究以下列尺度進行無因次化: 長度尺度  $H_s$ 、水壓擴散時間尺度  $H_s^2/D$ 、水力傳導速度尺度  $K$ 、壓力尺度  $\rho_w g H_s$ 。相關無因次化後之參數如下所示:

$$\begin{cases} z^* = \frac{z}{H_s}, & t^* = \frac{t}{H_s^2/D}, & I^*(t) = \frac{I(t)}{K}, \\ I_e^*(t) = \frac{I_e(t)}{K}, & P_e^* = \frac{P_e}{\rho_w g H_s}. \end{cases} \quad (2.12)$$

其中  $z^*$  為無因次水位,  $t^*$  為無因次時間,  $I^*(t)$  為無因次降雨入滲強度,  $I_e^*(t)$  為無因次岩盤出滲強度,  $P_e^*$  為無因次入滲超額孔隙水壓。此外, 考量利用柴比雪夫配置法求解擴散方程式中的二次空間微分項時, 須符合第一類型柴比雪夫多項式的範圍域  $[-1, 1]$ , 需將無因次空間  $z^* \in [0, 1]$ , 以  $\tilde{z} \equiv 2z^* - 1$ , 轉換為  $\tilde{z} \in [-1, 1]$ ; 同時為了消除由於高度  $z^*$  值域轉換所產生的係數, 使無因次超額孔隙水壓擴散方程式處理過程更簡潔些, 將無因次時間值域轉換為  $\tilde{t} = 4t^*$ 。

因此, 降雨入滲超額孔隙水壓控制方程式經過無因次化、空間域轉換及時間值域轉換後結果如下所列

$$\frac{\partial P_e^*}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 P_e^*}{\partial \tilde{z}^2} \quad (2.13)$$

邊界條件為

$$\frac{\partial P_e^*(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}} = \frac{I^*(\tilde{t})}{2} \quad \text{at } \tilde{z} = 1 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial P_e^*(\tilde{z}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}} = -\frac{I_e^*(\tilde{t})}{2} \quad \text{at } \tilde{z} = -1 \quad (2.15)$$

起始條件

$$P_e^*(\tilde{z}, \tilde{t}) = 0 \quad \text{at } \tilde{t} = 0 \quad (2.16)$$

### 三、數值方法

#### 1. 柴比雪夫多項式

本研究所討論之問題為降雨入滲下超額孔隙水壓之暫態解, 水壓力的變化與時間及深度相關, 對於非均勻降雨使用解析解雖然也可以得到相同解, 但解析解無法對於非均勻降雨入滲進行探討, 故本研究使用柴比雪夫數值方法來求解。柴比雪夫多項式求解法為 Chebyshev, P.L. (1821-1894) 發明, 適合用於求解數學物理非週期性邊界的問題 (Fox & Parker, 1968)。本研究採用第一類型柴比雪夫多項式波譜法求解控制方程式。柴比雪夫配置法乃利用  $T_k(\tilde{z})$  的餘弦正交性質當作基底函數, 乘於波譜係數  $\hat{u}_k(\tilde{t})$  後做線性疊加, 並於第  $N$  項將其截斷, 求得某物理量  $P(\tilde{z}, \tilde{t})$  的  $N$  項近似解  $P_N(\tilde{z}, \tilde{t})$ , 即

$$P_N(\tilde{z}, \tilde{t}) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k(\tilde{t}) T_k(\tilde{z}) \quad (3.1)$$

其中基底函數  $T_k(\tilde{z}) = \cos(k \cos^{-1} \tilde{z})$ , 為餘弦正交函數, 其中  $k$  為正整數,  $\tilde{z} = \cos \hat{\theta}$ ,  $-1 \leq \tilde{z} \leq 1$ , 即  $T_k(\tilde{z}) = \cos(k\hat{\theta})$ ,  $0 \leq \hat{\theta} \leq \pi$ 。例如

$$\begin{cases} T_0(\tilde{z}) = 1 \\ T_1(\tilde{z}) = \tilde{z} \\ T_2(\tilde{z}) = 2\tilde{z}^2 - 1 \\ T_3(\tilde{z}) = 4\tilde{z}^3 - 3\tilde{z} \\ T_4(\tilde{z}) = 8\tilde{z}^4 - 8\tilde{z}^2 + 1 \\ \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

基底函數  $T_k(\tilde{z})$  的一次微分

$$\begin{cases} T_0'(\tilde{z}) = 0 \\ T_1'(\tilde{z}) = 1 = T_0(\tilde{z}) \\ T_2'(\tilde{z}) = 4\tilde{z} = 4T_1(\tilde{z}) \\ T_3'(\tilde{z}) = 12\tilde{z}^2 - 3 = 3T_0(\tilde{z}) + 6T_2(\tilde{z}) \\ T_4'(\tilde{z}) = 32\tilde{z}^3 - 16\tilde{z} = 8T_1(\tilde{z}) + 8T_3(\tilde{z}) \\ \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

基底函數  $T_k(\tilde{z})$  的二次微分

$$\begin{cases} T_0''(\tilde{z}) = 0 \\ T_1''(\tilde{z}) = 0 \\ T_2''(\tilde{z}) = 4 = 4T_0(\tilde{z}) \\ T_3''(\tilde{z}) = 24\tilde{z} = 24T_1(\tilde{z}) \\ T_4''(\tilde{z}) = 96\tilde{z}^2 - 16 = 32T_0(\tilde{z}) + 48T_2(\tilde{z}) \\ \dots \end{cases} \quad (3.4)$$

顯然基底函數  $T_k(\tilde{z})$  的微分具有下列特性

$$\begin{cases} T_j'(\tilde{z}) = \sum_{k=0}^N a_{j,k} T_k(\tilde{z}) \\ T_j''(\tilde{z}) = \sum_{k=0}^N b_{j,k} T_k(\tilde{z}) \end{cases} \quad (3.5)$$

在採用數值分法求解時, 本研究使用 Gauss-Lobatto 方法設置配置計算點 (Peyret, 2002), 將  $0 \leq \hat{\theta} \leq \pi$  區分為  $N$  個點, 即

$$\tilde{z}_j = \cos\left(\frac{(j-1)\pi}{N}\right), \quad j = 1, 2, \dots, N+1 \quad (3.6)$$

在上述的配置點上柴比雪夫多項式具有正交特性, 即

$$\sum_{j=1}^{N+1} T_m(\tilde{z}_j) T_n(\tilde{z}_j) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{N}{2}, & m = n \neq 0 \\ N, & m = n = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

假設無因次超額孔隙水壓函數的近似解可用柴比雪夫多項式來表示

$$P_e^* \approx P_{eN}^*(\tilde{z}, \tilde{t}) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_{1k}(\tilde{t}) T_k(\tilde{z}) \quad (3.8)$$

其中  $\hat{u}_{1k}(\tilde{t})$  為超額孔隙水壓柴比雪夫多項式之係數。利用柴比雪夫多項式在配置點上具有正交之特性, 可將超額孔隙水壓函數任意位置的 1 次微分項, 改寫成土體縱斷面  $N+1$  配置點超額孔隙水壓的線性疊加 (Peyret, 2002, Chapter 3), 即

$$\left. \frac{\partial P_{eN}^*}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=\tilde{z}_i} = P_{eN}^{*(1)}(\tilde{z}_i, \tilde{t}) = \sum_{j=1}^{N+1} R_{i,j}^{(1)} P_{eN}^*(\tilde{z}_j, \tilde{t}) \quad (3.9)$$

或寫成

$$\begin{bmatrix} P_{eN}^{*(1)}(\tilde{z}_1, \tilde{t}) \\ \vdots \\ P_{eN}^{*(1)}(\tilde{z}_{N+1}, \tilde{t}) \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} P_{eN}^*(\tilde{z}_1, \tilde{t}) \\ \vdots \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_{N+1}, \tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

其中  $\mathbf{R}$  是  $(N+1) \times (N+1)$  係數矩陣

$$\mathbf{R} = [R_{i,j}^{(1)}] = \begin{bmatrix} R_{1,1}^{(1)} & \cdots & R_{1,N+1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N+1,1}^{(1)} & \cdots & R_{N+1,N+1}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

其中矩陣內對應係數值的計算方式列於附錄一。

同理，超額孔隙水壓函數任意位置的 2 次微分項為

$$P_{eN}^{*(2)}(\tilde{z}_i, \tilde{t}) = \sum_{j=1}^{N+1} R_{i,j}^{(2)} P_{eN}^*(\tilde{z}_j, \tilde{t}) \quad (3.12)$$

或寫成

$$\begin{bmatrix} P_{eN}^{*(2)}(\tilde{z}_1, \tilde{t}) \\ \vdots \\ P_{eN}^{*(2)}(\tilde{z}_{N+1}, \tilde{t}) \end{bmatrix} = \mathbf{R}^2 \begin{bmatrix} P_{eN}^*(\tilde{z}_1, \tilde{t}) \\ \vdots \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_{N+1}, \tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

## 2. 柴比雪夫配置求解法

將 (2.12) 式經過空間及時間轉換的參數代入將無因次超額孔隙水壓擴散方程式後得到無因次入滲超額孔隙水壓  $N$  項近似解的擴散方程式為

$$\frac{\partial P_{eN}^*(\tilde{z}_i, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 P_{eN}^*(\tilde{z}_i, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}^2} = \sum_{j=1}^{N+1} R_{i,j}^{(2)} P_{eN}^*(\tilde{z}_j, \tilde{t}) \quad (3.17)$$

其中  $i = 2, \dots, N$

或寫成

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \begin{bmatrix} P_{eN}^*(\tilde{z}_2, \tilde{t}) \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_3, \tilde{t}) \\ \vdots \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_N, \tilde{t}) \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} P_{eN}^*(\tilde{z}_1, \tilde{t}) \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_2, \tilde{t}) \\ \vdots \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_N, \tilde{t}) \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_{N+1}, \tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

其中  $\mathbf{Q}$  是  $(N-1) \times (N+1)$  係數矩陣，

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} R_{2,1}^{(2)} & R_{2,2}^{(2)} & \cdots & R_{2,N+1}^{(2)} \\ R_{3,1}^{(2)} & R_{3,2}^{(2)} & \cdots & R_{3,N+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{N,1}^{(2)} & R_{N,2}^{(2)} & \cdots & R_{N,N+1}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

無因次邊界條件 ( $\tilde{z}_1 = 1$  及  $\tilde{z}_{N+1} = -1$ ) 及起始條件 ( $\tilde{t} = 0$ ) 分別為

$$\begin{cases} \frac{\partial P_{eN}^*(\tilde{z}_1, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}} = \sum_{j=1}^{N+1} R_{1,j}^{(1)} P_{eN}^*(\tilde{z}_j, \tilde{t}) = \frac{I^*(\tilde{t})}{2} \\ \frac{\partial P_{eN}^*(\tilde{z}_{N+1}, \tilde{t})}{\partial \tilde{z}} = \sum_{j=1}^{N+1} R_{N+1,j}^{(1)} P_{eN}^*(\tilde{z}_j, \tilde{t}) = -\frac{I_e^*(\tilde{t})}{2} \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_i, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N+1. \end{cases} \quad (3.20)$$

將無因次邊界條件 ( $\tilde{z}_1 = 1$  及  $\tilde{z}_{N+1} = -1$ ) 寫成矩陣式

$$\begin{bmatrix} R_{1,1}^{(1)} & R_{1,N+1}^{(1)} \\ R_{N+1,1}^{(1)} & R_{N+1,N+1}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{eN}^*(\tilde{z}_1, \tilde{t}) \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_{N+1}, \tilde{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I^*(\tilde{t})}{2} - \sum_{j=2}^N R_{1,j}^{(1)} P_{eN}^*(\tilde{z}_j, \tilde{t}) \\ -\frac{I_e^*(\tilde{t})}{2} - \sum_{j=2}^N R_{N+1,j}^{(1)} P_{eN}^*(\tilde{z}_j, \tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

將上式乘上係數矩陣的反矩陣之後，可得土體表面及底部邊界條件之無因次超額孔隙水壓關係式

$$\begin{bmatrix} P_{eN}^*(\tilde{z}_1, \tilde{t}) \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_{N+1}, \tilde{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1,1}^{(1)} & R_{1,N+1}^{(1)} \\ R_{N+1,1}^{(1)} & R_{N+1,N+1}^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{I^*(\tilde{t})}{2} - \sum_{j=2}^N R_{1,j}^{(1)} P_{eN}^*(\tilde{z}_j, \tilde{t}) \\ -\frac{I_e^*(\tilde{t})}{2} - \sum_{j=2}^N R_{N+1,j}^{(1)} P_{eN}^*(\tilde{z}_j, \tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

令係數矩陣反矩陣後的係數符號為

$$\begin{bmatrix} R_{1,1}^{(1)} & R_{1,N+1}^{(1)} \\ R_{N+1,1}^{(1)} & R_{N+1,N+1}^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{1,1}^{(1)*} & R_{1,N+1}^{(1)*} \\ R_{N+1,1}^{(1)*} & R_{N+1,N+1}^{(1)*} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

並令兩個新的係數  $a_j$  及  $b_j$  為

$$\begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{1,1}^{(1)*} \times R_{1,j}^{(1)} - R_{1,N+1}^{(1)*} \times R_{N+1,j}^{(1)} \\ -R_{N+1,1}^{(1)*} \times R_{1,j}^{(1)} - R_{N+1,N+1}^{(1)*} \times R_{N+1,j}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

因此土體表面及底部邊界條件之無因次超額孔隙水壓關係式可以改寫為

$$\begin{bmatrix} P_{eN}^*(\tilde{z}_1, \tilde{t}) \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_{N+1}, \tilde{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_{1,1}^{(1)*} \times I^*(\tilde{t}) - R_{1,N+1}^{(1)*} \times I_e^*(\tilde{t})}{2} + \sum_{j=2}^N a_j P_{eN}^*(\tilde{z}_j, \tilde{t}) \\ \frac{R_{N+1,1}^{(1)*} \times I^*(\tilde{t}) - R_{N+1,N+1}^{(1)*} \times I_e^*(\tilde{t})}{2} + \sum_{j=2}^N b_j P_{eN}^*(\tilde{z}_j, \tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

將上式補上  $P_{eN}^*(\tilde{z}_2, \tilde{t}) \sim P_{eN}^*(\tilde{z}_N, \tilde{t})$ ，則土體從表面至底部所有配置點上的無因次超額孔隙水壓以矩陣方式可以表示為

$$\begin{bmatrix} P_{eN}^*(\tilde{z}_1, \tilde{t}) \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_2, \tilde{t}) \\ \vdots \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_N, \tilde{t}) \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_{N+1}, \tilde{t}) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} P_{eN}^*(\tilde{z}_2, \tilde{t}) \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_3, \tilde{t}) \\ \vdots \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_N, \tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} R_{1,1}^{(1)*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2} R_{N+1,1}^{(1)*} \end{bmatrix} + I^*(\tilde{t}) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} R_{1,N+1}^{(1)*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2} R_{N+1,N+1}^{(1)*} \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{A}$  是  $(N+1) \times (N-1)$  係數矩陣，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_{N-1} & a_N \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_{N-1} & b_N \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

將無因次超額孔隙水壓矩陣代入超額孔隙水壓  $N$  項近似解的擴散方程式後得到

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} P_{eN}^*(\tilde{z}_2, \tilde{t}) \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_3, \tilde{t}) \\ \vdots \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_N, \tilde{t}) \end{bmatrix} = \mathbf{QA} \begin{bmatrix} P_{eN}^*(\tilde{z}_2, \tilde{t}) \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_3, \tilde{t}) \\ \vdots \\ P_{eN}^*(\tilde{z}_N, \tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$-I^*(\tilde{t})\mathbf{Q} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}R_{1,1}^{(i)*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2}R_{N+1,1}^{(i)*} \end{bmatrix} + I_e^*(\tilde{t})\mathbf{Q} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}R_{1,N+1}^{(i)*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2}R_{N+1,N+1}^{(i)*} \end{bmatrix}$$

本研究使用 4 階 Runge-Kutta 方法 (詳附錄二), 求解上式一次常微分方程式, 用以得到  $\tilde{z}_2$  至  $\tilde{z}_N$  各配置點上無因次超額孔隙水壓隨時間之變化; 將前述計算結果代入邊界條件關係式 (3.25 式) 就可以得到在土體底部的超額孔隙水壓力, 然後用以判斷此底部超額孔隙水壓力是否大於土體崩塌之臨界超額孔隙水壓力; 若是, 則土體發生崩塌。

## 四、結果與討論

### 1. 土體相關參數

本研究土體崩塌分析所使用的土壤及相關參數, 如表 1 所示, 其中土壤參數參考 S&I 模式使用過之參數 (Schaeffer and Iverson, 2008):

### 2. 土體崩塌臨界坡度

先考量土體沒有降雨入滲及岩盤出流入滲下, 使用 (2.3) 或 (2.4) 式分析土體在不同地下水位情況下之崩塌臨界坡度。圖 2 說明在孔隙率  $\phi = 0.3962$  及密度比  $\rho_w / \rho_s = 1.6$  情況下, 土體相對臨界崩塌坡度與無因次地下水位之關係。當  $H_w / H_s = 0$  時,  $\tan \theta_{cr} = \tan \phi_0$ ; 當  $H_w / H_s = 1$  時,  $\tan \theta_{cr} / \tan \phi_0 \approx 0.5$ 。

考量土體的厚度  $H_s$  為 3 公尺, 地下水位  $H_w$  介於 0 到 3 公尺之間。當  $H_w = 0$  時,  $\theta_{cr} = \tan^{-1}(\mu) \rightarrow \theta_{cr} = \phi_0 = 35^\circ$ 。當  $H_w = H_s = 3$  公尺時,

$$\theta_{cr} = \tan^{-1} \left( \mu \frac{1 - (1 - \phi) \frac{\rho_w H_w}{\rho_s H_s}}{1 + \phi \frac{\rho_w H_w}{\rho_s H_s}} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left( 0.7 \times \frac{1 - (1 - 0.3962) / 1.6}{1 + (0.3962 / 1.6)} \right) = 19.26^\circ$$

表 1 本研究分析採用之土壤及相關參數

Table 1 Soil parameters used in this analysis

土壤參數	單位	數值	
$\rho_s$	土壤容密度	kg/m <sup>3</sup>	1600
$\rho_w$	水密度	kg/m <sup>3</sup>	1000
$\phi$	孔隙率	---	0.3962
$D$	水力擴散係數	m <sup>2</sup> /s	0.001
$K$	水力傳導度	m/s	0.0002
$\mu$	摩擦係數	---	0.7
$\phi_0$	摩擦角	degree	35
$H_s$	土體厚度	m	3
$H_w$	地下水位高度	m	0~3
$\theta$	土體坡度	degree	18
$g$	重力加速度	m/s <sup>2</sup>	9.8

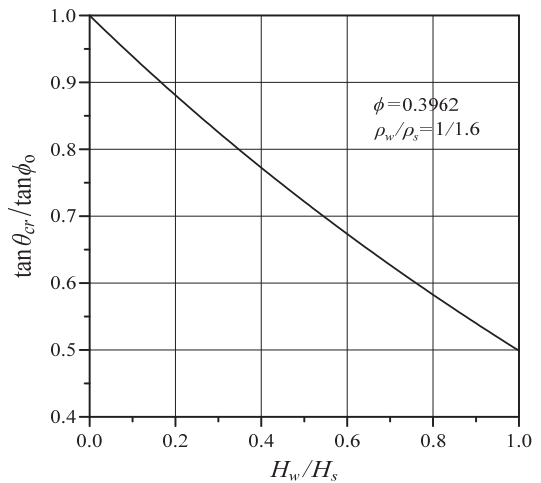


圖 2 土體相對臨界崩塌坡度與無因次地下水位之關係

Fig.2 The relative critical slopes for landslide versus the dimensionless groundwater levels.

當地下水位  $H_w$  由 0 增加到 3 公尺時, 土體崩塌的臨界坡度  $\theta_{cr}$  由 35 度降為 19.26 度, 如圖 3 所示, 表示地下水位愈高土體崩塌的臨界坡度愈小, 土體愈容易發生崩塌。如表 1 中所示, 本研究土體的坡度為 18 度, 小於 19.26 度, 表示土體未處於崩塌臨界條件, 此說明在沒有降雨入滲及岩盤出流入滲下即使在地下水位接近地表 ( $H_w = H_s = 3$ ) 時, 土體仍處於穩定狀態, 不會產生崩塌滑動。下一節將討論穩定土體在降雨入滲或岩盤出流入滲情況下發生崩塌之臨界條件。

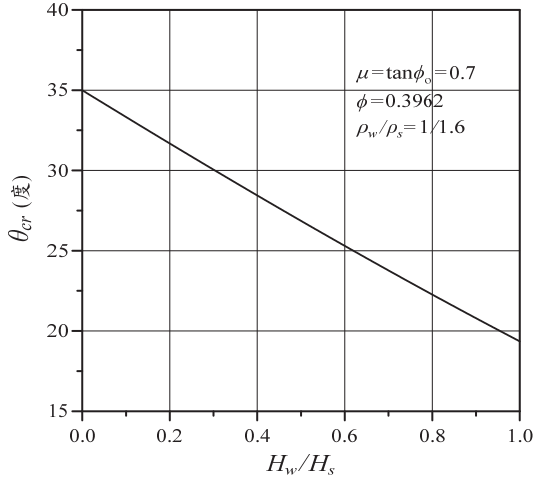


圖 3 土體在摩擦係數為 0.7 情況下臨界崩塌坡度與無因次地下水水位之關係

Fig.3 Critical slopes for landslide under different dimensionless groundwater levels for the case of soil friction coefficient of 0.7.

### 3. 使土體崩場所需的超額孔隙水壓

本模式考慮「降雨入滲」或「岩盤出滲」為造成土體底部的外力來源，如圖 4 所示。土體崩塌滑動臨界孔隙水壓  $P_{critical}$  係指原先穩定土體受到外力作用下（如降雨入滲或岩盤出滲），土體底部超額孔隙水壓上升（摩擦力下降），當超額孔隙水壓上升超過某一臨界值時造成土體崩塌滑動，此臨界超額孔隙水壓稱為土體崩塌滑動臨界孔隙水壓。換句話說，當  $P_e > P_{critical}$  時，會觸使原先穩定土體發生滑動現象。

由 (2.2) 式可得土體底部崩塌滑動臨界孔隙水壓

$$P_{critical} = [\rho_s H_s - (1 - \phi) \rho_w H_w] g \cos \theta - (\rho_s H_s + \phi \rho_w H_w) g \sin \theta / \mu \quad (4.1)$$

或是以無因次表示為

$$\frac{P_{critical}}{\rho_s g H_s \cos \theta} = \left[ 1 - (1 - \phi) \frac{\rho_w H_w}{\rho_s H_s} \right] - \left( 1 + \phi \frac{\rho_w H_w}{\rho_s H_s} \right) \frac{\tan \theta}{\tan \phi_0} \quad (4.2)$$

再將表 1 參數代入上述關係式可得在土體坡度  $\theta = 18^\circ$  時土體崩塌臨界孔隙水壓  $P_{critical}$  與無因次地下水水位  $H_w/H_s$  之關係，如圖 5 所示。圖中顯示  $H_w/H_s$  愈大， $P_{critical}$  愈小。例如，當  $H_w = 0$  (i.e.,  $H_w/H_s = 0$ ) 時，

$$P_{critical} = (1600 \times 3) \times 9.8 \times \cos 18^\circ - \frac{1}{0.7} (1600 \times 3) \times 9.8 \times \sin 18^\circ \approx 23,972 \text{ N/m}^2$$

當  $H_w = 1.5$  公尺 (i.e.,  $H_w/H_s = 1/2$ ) 時，

$$P_{critical} = [1600 \times 3 - (1 - 0.3962) \times 1000 \times 1.5] \times 9.8 \times \cos 18^\circ - \frac{1}{0.7} (1600 \times 3 + 0.3962 \times 1000 \times 1.5) \times 9.8 \times \sin 18^\circ \approx 12,959 \text{ N/m}^2$$

當  $H_w = H_s = 3$  公尺 (i.e.,  $H_w/H_s = 1$ ) 時，

$$P_{critical} = [1600 \times 3 - (1 - 0.3962) \times 1000 \times 3] \times 9.8 \times \cos 18^\circ - \frac{1}{0.7} (1600 \times 3 + 0.3962 \times 1000 \times 3) \times 9.8 \times \sin 18^\circ \approx 1,947 \text{ N/m}^2$$

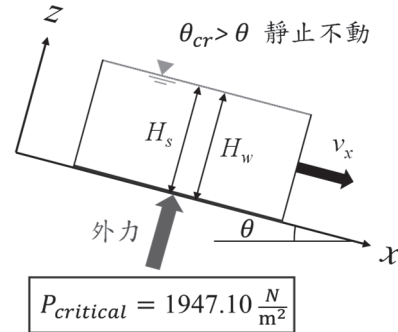


圖 4 崩塌土體滑動臨界孔隙水壓示意圖

Fig.4 Schematic diagram for critical pore water pressure of landslide soil layer.

上述說明當地下水位由 0 增加到 3 公尺時，觸使原先穩定土體發生滑動所需土體底部超額孔隙水壓由 23,972  $\text{N/m}^2$  降為 1947.10  $\text{N/m}^2$ 。

此外，取  $\phi = 0.3962$ 、 $\rho_s / \rho_w = 1.6$ 、及令無因次  $P_{critical}^* = P_{critical} / (\rho_s g H_s \cos \theta)$ ，則無因次  $P_{critical}^*$  與  $H_w/H_s$  及  $\tan \theta / \tan \phi_0$  之關係為

$$P_{critical}^* = \frac{P_{critical}}{\rho_s g H_s \cos \theta} = \left[ 1 - 0.3774 \frac{H_w}{H_s} \right] - \frac{\tan \theta}{\tan \phi_0} \left( 1 + 0.2476 \frac{H_w}{H_s} \right) \quad (4.3)$$

圖 6 顯示  $\tan \theta / \tan \phi_0$  愈小或  $H_w/H_s$  愈小，則土體崩場所需之臨界孔隙水壓  $P_{critical}^*$  愈大。

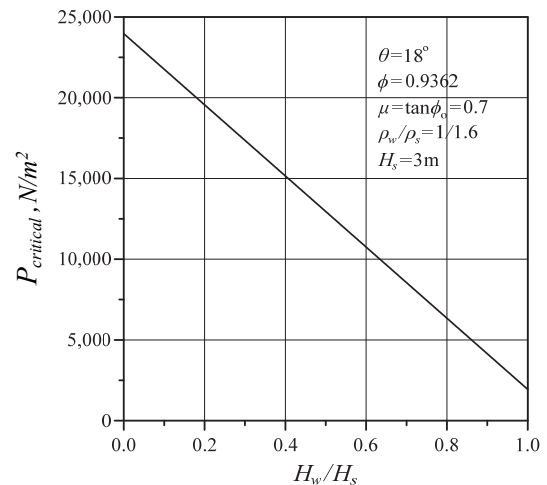


圖 5 土體在坡度 18 度時臨界崩塌孔隙水壓與無因次地下水水位之關係

Fig.5 Critical pore pressures for landslide initiation under different dimensionless groundwater levels for the case of soil slope of 18°.

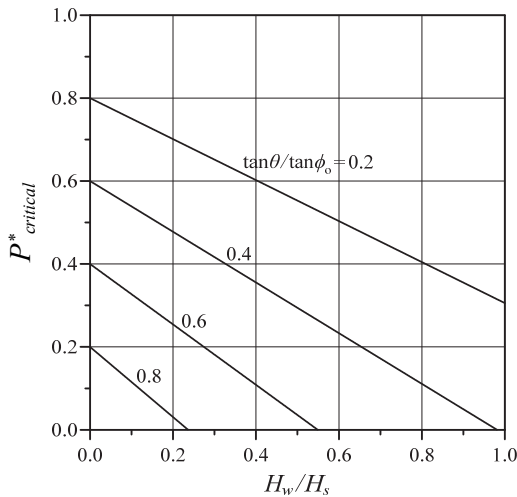


圖 6 土體崩塌無因次臨界孔隙水壓與無因次地下水位及土體坡度之關係

Fig.6 Dimensionless critical pore pressures for landslide initiation under different dimensionless groundwater levels and soil slopes.

4. 降雨入滲超額孔隙水壓及土體崩塌

本節模擬土壤參數參考表 1, 在已知降雨強度及地下水位條件下, 可以分析持續降雨過程超額孔隙水壓在深度方面之分布及其隨時間之變化。圖 7 顯示土體在地下水位  $H_w = H_s = 3$  公尺及持續降雨 10 mm/h 條件下降雨入滲超額孔隙水壓在深度及時間上之變化。土體底部超額孔隙水壓隨著降雨時間的增加而逐漸增加。當土體底部超額孔隙水壓超過崩塌臨界超額孔隙水壓  $P_{critical} (= 1,947 \text{ N/m}^2)$  時, 土體發生崩塌, 即持續降雨時間 12.3 小時後發生崩塌 (圖中虛線)。

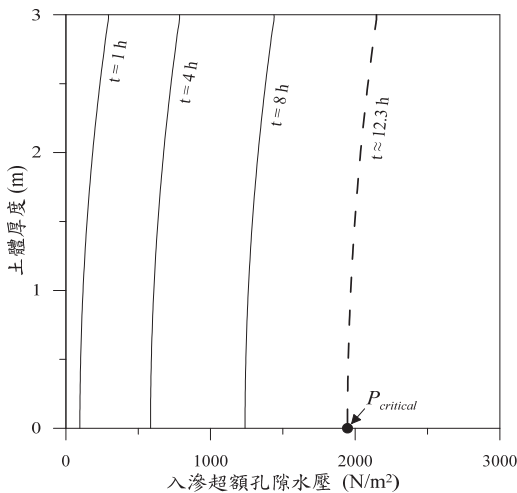


圖 7 土體在地下水位  $H_w = H_s = 3$  公尺及持續降雨 10 mm/h 條件下降雨入滲超額孔隙水壓在深度及時間上之變化。

Fig.7 Excess pore water pressure evolution under the conditions of  $H_w = H_s = 3 \text{ m}$  and  $I = 10 \text{ mm/h}$

圖 8 顯示土體在地下水位  $H_w = 0$  及持續降雨 10 mm/h 條件下土體底部超額孔隙水壓恰好等於崩塌臨界超額孔隙水壓時之入滲超額孔隙水壓在深度之分布。顯然在土體地下水位很低時, 土體崩塌臨界超額孔隙水壓為  $P_{critical} = 23,972 \text{ N/m}^2$ , 持續降雨入滲 10 mm/h 大約 6.13 天之後, 土體發生崩塌。

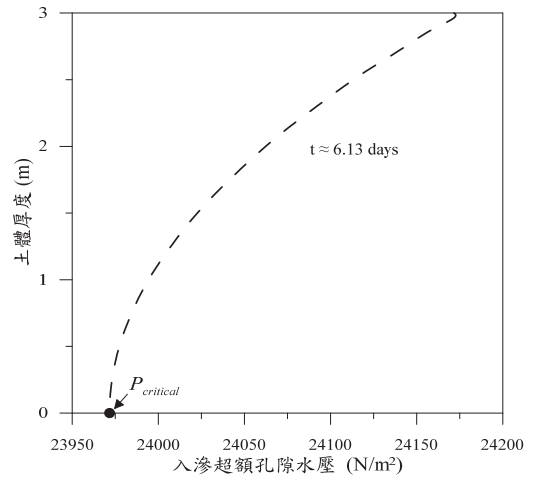


圖 8 土體在地下水位  $H_w = 0$  及持續降雨 10 mm/h 條件下土體底部超額孔隙水壓恰好等於崩塌臨界超額孔隙水壓時之入滲超額孔隙水壓在深度之分布。

Fig.8 Excess pore water pressure distribution under the conditions of  $H_w = 0 \text{ m}$  and  $I = 10 \text{ mm/h}$  at time  $t = 6.13 \text{ days}$ .

同理, 土體在地下水位  $H_w = 1.5$  公尺及持續降雨 10 mm/h 條件下, 土體崩塌臨界超額孔隙水壓為  $P_{critical} = 12,959 \text{ N/m}^2$ , 持續降雨 10 mm/h 大約 3.32 天之後, 土體發生崩塌。表 2 顯示不同地下水位下土體崩塌所需之臨界超額孔隙水壓及土體崩塌發生時間。地下水位愈低, 所需之臨界超額孔隙水壓愈大, 土體崩塌發生時間愈晚。

表 2 固定降雨強度比較不同地下水位條件下土體崩塌發生之時間

Table 2 The time for landslide triggering under different groundwater levels and infiltration rate of 10 mm/h

均勻降雨入滲強度 10 mm/h		
地下水位 $H_w$ (m)	土體崩塌臨界超額孔隙水壓 $P_{critical}$ ( $\text{N/m}^2$ )	土體崩塌發生時間
0	23,972	6.13 days
1.5	12,959	3.32 days
3.0	1,947	12.3 hours

當固定地下水位  $H_w = 1.50$  公尺時, 對應之土體崩塌臨界孔隙水壓  $P_{critical} \approx 12,959 \text{ N/m}^2$ 。表 3 及圖 9 比較降雨強度 10, 20 及 50 等 3 種降雨強度情況下, 持續降雨情況下土體發生崩塌之時間。

表 3 固定地下水位比較不同降雨強度情況下土體崩塌發生之時間

Table 3 The time for landslide triggering under different infiltration rates and the groundwater level of 1.5 m.

地下水位 $H_w = 1.50$ 公尺 崩塌臨界孔隙水壓 $P_{critical} \approx 12,959 \text{ N/m}^2$	
均勻降雨入滲強度 (mm/h)	土體崩塌發生時間
10	3.32 days
20	1.67 days
50	16.29 hours

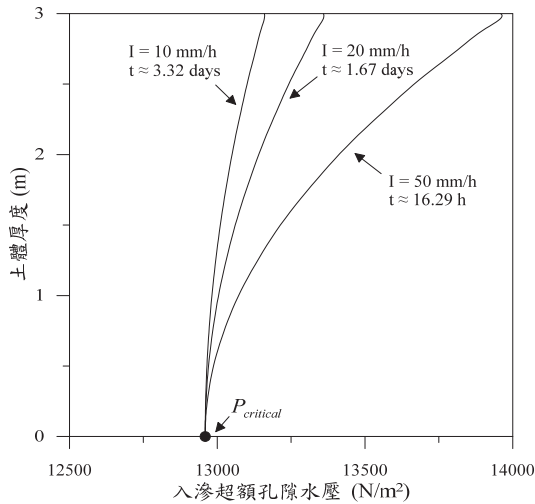


圖 9 比較不同降雨強度情況下土體發生崩壞時間  
**Fig.9 Time of landslide triggering for a loamy sand hillslope containing  $H_w = 1.5$  m under different rain infiltration rates**

5. 比較非均勻降雨與平均降雨之結果

前述討論均假設降雨為均勻降雨，我們進一步分析如果降雨為非均勻降雨時對於土體崩壞時間的影響。假設

$$I(t_k) = 50 \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \text{ mm/h}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.29)$$

其中  $t_k$ :  $k-1 \leq t < k$  小時。對應之平均降雨入滲強度為

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(t_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 50 \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \quad (3.30)$$

例如： $n = 7$ ，非均勻降雨入滲強度如圖 10 所示， $I(t_3) = 46.2$  mm/h，平均降雨入滲強度  $\bar{I} = 35.91$  mm/h。

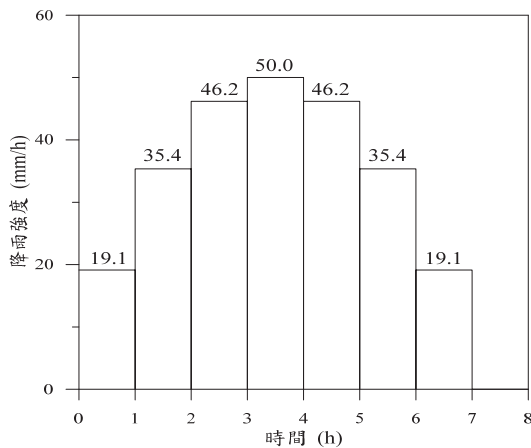


圖 10 非均勻降雨入滲強度分布之假設案例  
**Fig.10 Case study for nonuniform rain infiltration used in this study**

固定地下水位為  $H_w = 3$  公尺下，圖 10 比較非均勻降雨與均勻降雨（以平均降雨強度計）持續降雨過程土體內降雨入滲超額孔隙水壓在深度方面之分布及其隨時間之變化。圖中顯示降雨初期平均降雨強度高於非均勻降雨強度，因此平均降雨強度產生入滲超額孔隙水壓高於非均勻降雨強度下的入滲超額孔隙水壓。但就本案例而言，如圖 11 所示，對於到達土

體崩壞的時間及累積的雨量差異有限（分別為 3.74 小時與 3.79 小時；134.3 mm 及 140.2 mm），因此可以平均降雨強度來推估土體崩壞的時間及累積雨量。

此外，本案例因為在本此降雨之前土體已經完全飽和，土體坡度雖然只有 18 度，只要累積雨量大於 134.3 mm 就可能激發土體的崩壞。

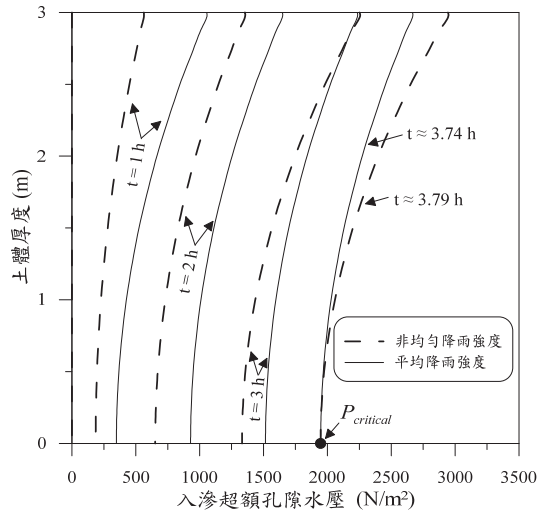


圖 11 比較非均勻降雨與平均降雨強下土體中入滲超額孔隙水壓

**Fig.11 Comparison of excess pore water pressure under uniform and nonuniform rain infiltration**

6. 降雨過程地下水位增加之影響

前述的分析均假設降雨過程中地下水位是固定的，也就是說假設降雨入滲到土體的水量完全排除掉，沒有蓄積在土體中轉換為地下水位的增加。這樣的假設也許過於理想化。本章節分析另外一種極端情形，假設降雨入滲到土體的水量完蓄積在土體中轉換為地下水位的增加，然後分析降雨過程考慮每小時調增一次地下水位情況下對到達土體發生崩壞時間的影響。考量連續降雨過程之地下水位

$$\underbrace{H_w(t_k)}_{\text{降雨 } k \text{ 小時後地下水位}} = \underbrace{H_w(t_0)}_{\text{地下水位初始水位}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{1}{2\phi} [I(t_i) + I(t_{i-1})] \Delta t}_{\text{連續降雨入滲 } k \text{ 小時後地下水位增加之累積量}} \quad (3.31)$$

設均勻持續降雨強度 10 mm/h，起始地下水位  $H_w = 0$  情況下，依照降雨強度的大小降雨過程每小時調增一次地下水位 ( $\Delta t = 1$  小時)，按本研究所提出的方法模擬分析土體的入滲超額孔隙水壓。結果顯示當持續降雨 2.87 天時，累積雨量 689 mm，地下水位由零逐漸增加至 1.74 m，土體底部入滲超額孔隙水壓將達到所對應之土體崩壞臨界超額孔隙水壓 ( $P_{critical} = 11,186 \text{ N/m}^2$ )，發生土體崩壞，圖 12 所示。從圖中可以看出，在相同均勻持續降雨強度下，如果地水位固定不變 ( $H_w = 0$ )，到達土體發生的時間為 6.13 天，遠大於有考量地下水位逐漸增加的情況 (2.87 天)，這是因為地下水位逐漸增加的過程，發生土體崩壞所需的臨界超額孔隙水壓逐漸下降。



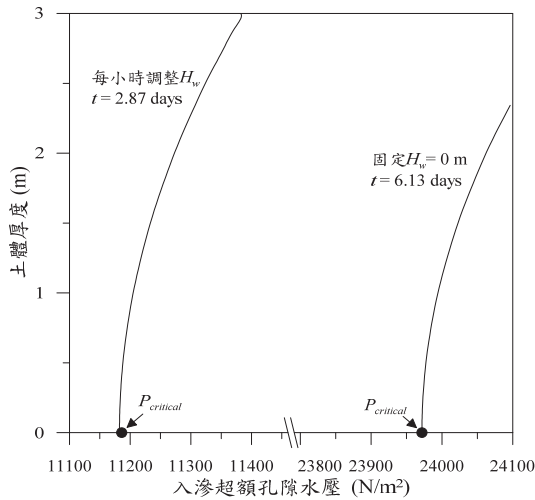


圖 12 比較地下水位固定不變與地下水位逐漸增加兩種情況下土體發生崩壞的時間

Fig.12 Comparison of excess pore water pressure under the conditions of  $H_w = 0$  and that under the consideration of groundwater level rising.

### 五、結 論

本研究考量降雨入滲對土體的影響，以牛頓第二運動定律為基礎，建構無限邊坡土體崩壞模式。以擴散方程式來描述降雨入滲水超額孔隙水壓的傳遞方式，以柴比雪夫法求解土體內超額孔隙水壓，從而分析土體是否會發生崩壞。本研究在案例分析方面，假設土體的厚度  $H_s$  為 3 公尺，地下水位  $H_w$  介於 0 到 3 公尺之間，土體的坡度為 18 度。相關土壤參數則參考 S&I 模式所使用的參數 (Schaeffer and Iverson, 2008)。研究結論如下：

1. 當地下水位  $H_w$  為 0 公尺及 3 公尺時，土體崩壞的臨界坡度分別為 35 度及 19.26 度，此反映地下水位愈高土體崩壞的臨界坡度愈小，需要較少的降雨入滲水超額孔隙水壓就能導致土體崩壞，如圖 3 及圖 5 所示。
2. 當土體的坡度為 18 度時，地下水位  $H_w$  由 0 變化到 3 公尺時，促使原先穩定土體發生滑動崩壞所需土體底部超額孔隙水壓由 23,972  $N/m^2$  降為 1,947  $N/m^2$ ，如圖 5 所示。因此在已知降雨強度條件下，地下水位愈高，土體崩壞所需之臨界超額孔隙水壓愈小，土體愈容易發生崩壞。
3. 當土體的坡度為 18 度及地下水位  $H_w$  為 1.5 公尺時，對應之土體崩壞臨界孔隙水壓為  $P_{critical} \approx 12,959 N/m^2$ 。比較 10, 20 及 50 等 3 種持續均勻降雨入滲強度情況下，土體崩壞發生時間。結果顯示均勻降雨入滲強度愈高，土體崩壞發生時間愈早。
4. 本研究也分析比較降雨為非均勻降雨與均勻降雨情況下土體內降雨入滲超額孔隙水壓在深度方面之分布及其隨時間之變化。結果顯示，均勻降雨與非均勻降雨對於到達土體崩壞的時間及累積的水量差異有限，因此未來可以用平均降雨強度來推估土體崩壞的時間及累積雨量。

5. 在初始地下水位  $H_w$  為 0 公尺，均勻持續降雨入滲強度為 10 mm/h 時，並考量地下水位隨降雨入滲過程中將導致地下水位的上升，分析結果顯示土體到達發生崩壞的時間由原先 6.13 天大幅下降為 2.87 天，此反應地下水位逐漸增加的過程，發生土體崩壞所需的臨界超額孔隙水壓逐漸下降，將大幅提早土體崩壞發生時間。

### 誌 謝

本研究承蒙科技部 MOST 104-2221-E-006-053-MY3 計畫經費補助，研究過程曾獲得陳文瑤博士在數值分析方法上之指導，特此致謝。

### 附錄一：係數矩陣

矩陣  $\mathbf{R} = [R_{i,j}^{(1)}]$  是  $(N+1) \times (N+1)$  係數矩陣，其中矩陣內對應係數分別為 (Peyret, 2002, Chapter 3)

$$\begin{cases}
 R_{i,j}^{(1)} = \frac{(-1)^{j-i}}{\tilde{z}_i - \tilde{z}_j} & \text{for } 1 < i \neq j < N+1, \\
 R_{j,j}^{(1)} = -\frac{\tilde{z}_{j+1}}{2(1-\tilde{z}_j^2)} & \text{for } 1 < j < N+1, \\
 R_{1,1}^{(1)} = -R_{N+1,N+1}^{(1)} = \frac{1+2N^2}{6}, \\
 R_{1,j}^{(1)} = 2\frac{(-1)^{j+1}}{1-\tilde{z}_j} & \text{for } 1 < j < N+1, \\
 R_{j,1}^{(1)} = -\frac{(-1)^{j+1}}{2(1-\tilde{z}_j)} & \text{for } 1 < j < N+1, \\
 R_{j,N+1}^{(1)} = \frac{(-1)^{N+1-j}}{2(1+\tilde{z}_j)} & \text{for } 1 < j < N+1, \\
 R_{N+1,j}^{(1)} = -2\frac{(-1)^{N+1-j}}{1+\tilde{z}_j} & \text{for } 1 < j < N+1, \\
 R_{1,N+1}^{(1)} = -R_{N+1,1}^{(1)} = \frac{(-1)^N}{2}.
 \end{cases} \tag{A1.1}$$

例如， $N = 3$ ，則

$$\tilde{z}_{1-4} = \cos\left(\frac{(0 \sim 3)\pi}{3}\right) = 1, 1/2, -1/2, -1 \tag{A1.2}$$

$$\mathbf{R} = [R_{i,j}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{19}{6} & -4 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & 4 & -\frac{19}{6} \end{bmatrix} \tag{A1.3}$$

$$\mathbf{R}^2 = [R_{i,j}^{(2)}] = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & -\frac{28}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{10}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{28}{3} & \frac{16}{6} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.4})$$

## 附錄二：4 階 Runge-Kutta 方法

已知某物理量  $y = y(t)$ ，其一次微分方程式為

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (\text{A2.1})$$

方程式左右兩邊都包含變數  $y(t)$ ，為隱式方程式，往往需要使用數值方法求解。當使用 4 階 Runge-Kutta 數值方法求解上述一次常微分方程式時，在時間差  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ， $y_{n+1} = y(t_{n+1})$  和  $y_n = y(t_n)$  之關係可以表示為

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (\text{A2.2})$$

其中

$$\begin{cases} K_1 = f(t_n, y_n) \\ K_2 = f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + K_1 \frac{\Delta t}{2}) \\ K_3 = f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + K_2 \frac{\Delta t}{2}) \\ K_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + K_3) \end{cases} \quad (\text{A2.3})$$

## 參考文獻

- [1] 柯傑夫、卡艾璋、萊威廉、林伯勳、冀樹勇 (2011)，「岩盤滲水對於室內試驗模擬與鐵立庫崩塌形狀及地形演變之影響」，2011 年中華水土保持學會年會及學術研討會，中興大學。(Keck, J., Capart, H., Wright, W., Lin, B.S., and Chi, S.Y. (2011). "Tieliku landslide, Northern Taiwan: Possible role of focused bedrock exfiltration tested using a laboratory analogue." *Annual meeting and conference of soil and water Conservation 2011*. (in Chinese))
- [2] 洪唯峰 (2015)，「地文參數改變對地下水出滲引發崩塌運動之敏感度分析」，國立成功大學水利及海洋工程研究所碩士論文。(Hung, W.F. (2015). *Sensitivity analysis of landslide triggered by groundwater exfiltration due to the change of geomorphic factors*, Master Thesis, National Cheng Kung University, Taiwan, ROC. (in Chinese))
- [3] 陳弘恩 (2014)，「考量降雨及逕流影響之淺層坡地崩塌分析模擬」，國立交通大學土木工程研究所博士論文。(Chen, H.E. (2014). *Modeling shallow landslide induced by rainfall and runoff*, PhD Dissertation, National Chiao Tung University, Taiwan, ROC. (in Chinese))
- [4] 陳冠翰 (2011)，「滲流誘發斜坡土體滑動特性之試驗」，國立中興大學水土保持學系所碩士論文。(Chen, K.H. (2011). *An experiment of the slope movement processes induced by inter-layer flow*, Master Thesis, National Chung Hsing University, Taiwan, ROC. (in Chinese))
- [5] 鄭佳元 (2009)，「降雨誘發淺層崩塌之研究」，國立成功大學資源工程學系碩士論文。(Cheng, C.Y. (2009). *Analysis of rainfall-triggered shallow landslides*. Master Thesis, National Cheng Kung University, Taiwan, ROC. (in Chinese))
- [6] 簡鍾凱 (2014)，「應用柴比雪夫配置法求解岩盤出滲引發崩塌運動之研究」，國立成功大學水利及海洋工程研究所碩士論文。(Jian, Z.K. (2014). *Application of a chebyshev collocation method to solve the movement of landslide triggered by bedrock exfiltration*, Master Thesis, National Cheng Kung University, Taiwan, ROC. (in Chinese))
- [7] Bronnimann, C., Stahli, M., Schneidern, P., Seward, L., and Springman, S. (2013). "Bedrock exfiltration as a triggering mechanism for shallow landslides." *Water Resource Research*, 49, 5155-5167.
- [8] Jan, C.D., Yang, R.Y., Hwung, H.H., and Chen, W.Y. (2016). "Intermittent slipping of landslide regulated by dilatancy evolution and velocity-weakening friction law: an efficient numerical scheme." *Journal of Mountain Science*, 13(8), 1333-1344.
- [9] Iverson, R.M. (2000). "Landslide triggering by rain infiltration." *Water Resour. Res.*, 36, 1897-1910.
- [10] Iverson, R.M. (2005). "Regulation of landslide motion by dilatancy and pore pressure feedback." *Journal of Geophysical Research*, 110, F02015, doi:10.1029/2004JF000268.
- [11] Peyret, R. (2002). *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*, Applied Mathematical Sciences 148, Springer.
- [12] Pradel, D., and Raad, G. (1993). "Effect of permeability on surficial stability of homogeneous slopes." *Journal of Geotechnical Engineering*, 119, 315-332.
- [13] Schaeffer, D.G., and Iverson R.M. (2008). "Steady and intermittent slipping in a model of landslide motion regulated by pore-pressure feedback." *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 69(3), 769-786.
- [14] Tan, S.B., Tan, S.L., Lim, T.L., and Yang, K.S. (1987). "Landslides Problems and their Control in Singapore". *Proceedings of the 9th Southeast Asian Geotechnical Conference*, Bangkok, Thailand, 125-136.
- [15] Tsai, T.L., and Yang, J.C. (2006). "Modeling of rainfall-triggered shallow landslide." *Environmental Geology*, 50(4), 525-534.
- [16] Wang, G, and Sassa K. (2003). "Pore-pressure generation and movement of rainfall-induced landslides: Effects of grain size and fine-particle content." *Engineering Geology*, 69, 109-125.

2017 年 03 月 21 日 收稿

2017 年 05 月 04 日 修正

2017 年 09 月 20 日 接受

(本文開放討論至 2018 年 06 月 30 日)